

Exemple de structure d'un cours de mathématiques

Laurent Bétermin

15 juin 2026

Résumé

L'objectif de ce document est de donner un exemple de structure d'un cours de mathématiques. Cet exemple, assez simple, porte sur les nombres irrationnels et permet de se faire une idée des articulations entre les concepts ainsi que du vocabulaire usuel utilisé dans un cours de mathématiques.

Définition 0.1. On dit qu'un réel x est irrationnel si $x \notin \mathbb{Q}$, c'est-à-dire s'il n'existe pas de couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = \frac{p}{q}$.

*Une **définition** est une explication de la signification mathématique d'un mot/concept. Elle sous-entend une équivalence entre le concept (ici "irrationnel") et une propriété (ici "ne pas pouvoir s'écrire comme une fraction de nombres entiers").*

Notation 0.2. On notera $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les réels irrationnels.

*Une **notation** permet de fixer, tout au long du document (ou d'un cours), la façon dont on note, généralement avec des symboles, un objet mathématique.*

Définition 0.3. On dit que deux entiers naturels p et q sont premiers entre eux s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Proposition 0.4. Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tels que $x = \frac{p}{q}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = \frac{a}{b}$. Si a et b sont premiers entre eux, on a démontré le lemme. Si ce n'est pas le cas, ils ont donc un diviseur commun d_1 et on a $x = \frac{d_1 a_1}{d_1 b_1} = \frac{a_1}{b_1}$. Si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, c'est terminé. Sinon, on simplifie de nouveau par un facteur commun. On continue le processus jusqu'à ce que les entiers de la fractions n'aient plus de facteur commun autre que 1. $\square$

*Une **proposition** est un énoncé vrai, intéressant bien que moins important/central qu'un théorème. Son énoncé doit être suivi d'une démonstration.*

Lemme 0.5. Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors p et q sont premiers entre eux si et seulement si p^2 et q^2 sont premiers entre eux.

Démonstration. Admise (cf. cours d'Arithmétique). $\square$

Lemme 0.6 (Lemme de Gauss). Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^*$. Si a et b sont premiers entre eux et $a = bc$, alors a divise c .

Démonstration. Admise (cf. cours d'Arithmétique). $\square$

*Un **lemme** est un énoncé vrai intermédiaire permettant par la suite de démontrer une proposition ou un théorème. Il doit être suivi d'une démonstration (ici, dans les deux cas, celle-ci est reportée à un chapitre ultérieur).*

Théorème 0.7. Soit $N \in \mathbb{N}$? Si N n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tel que $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$ (*ici on utilise la définition et la proposition*), alors on a $q^2 N = p^2$. Comme p et q sont premiers entre eux, alors il en est de même pour p^2 et q^2 (*ici on utilise le premier lemme*) et d'après le lemme de Gauss (*ici on utilise le deuxième lemme*), p^2 divise N . Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = p^2 k$ et on obtient $q^2 p^2 k = p^2$, donc $q^2 k = 1$. Comme $q^2 \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors on en déduit que $q^2 = k = 1$, donc $N = p^2$ est un carré parfait, ce qui est impossible. Donc $\sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

*Un **théorème** est un énoncé vrai central dans le contexte étudié. Il doit être suivi d'une démonstration utilisant très probablement des énoncés démontrés précédemment (ici les deux lemmes et la proposition).*

Exemple 0.8. D'après le théorème précédent, les réels suivant sont irrationnels : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$, car 2, 3, 5 et 6 ne sont pas des carrés parfaits.

*Un **exemple** illustre le résultat qui vient d'être énoncé et démontré.*

Corollaire 0.9. Il existe $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Comme 2 n'est pas un carré parfait, on sait que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ d'après le théorème (*ici on utilise un cas particulier du théorème : on énonce donc une implication directe de ce théorème*). On raisonne alors par disjonction de cas, en démontrant le corollaire dans chacun de ces cas :

- cas 1 : si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, alors on choisit $a = b = \sqrt{2}$,
- cas 2 : si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors on choisit $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ et on a $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

$\square$

*Un **corollaire** est un énoncé vrai qui découle facilement d'un théorème (ici on applique le théorème à $N = 2$ qui est un cas particulier, le reste de la démonstration est une astuce). Son énoncé doit être suivi d'une démonstration.*

A ce stade, on peut énoncer (pour nous) la conjecture suivante potentiellement difficile à démontrer :

Conjecture 0.10. Le nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

*Une **conjecture** est un énoncé que l'on pense être vrai, mais dont on n'a pas la démonstration.*

Remarque 0.11. En fait, cette conjecture a été démontrée (de manière plus générale) en 1934 par les mathématiciens Gelfond et Schneider, mais la preuve dépasse très largement le niveau de ce cours. Il ne s'agit donc plus véritablement d'une conjecture.

*Une **remarque** est un complément à ce qui est énoncé juste avant, soulignant un fait important, faisant parfois des liens avec d'autres résultats, énonçant pourquoi une implication n'est pas une équivalence, etc.*