Preuves de cours au programme du Contrôle Partiel

UE Algèbre 1 - Laurent Bétermin

22 octobre 2026

1 Preuve de la Proposition 1.7

Soit I un ensemble fini, $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de réels, $p \leq n$ deux entiers naturels et $\lambda, q \in \mathbb{R}$.

1. Notons $I = \{k_1, ..., k_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}(a_k + \lambda b_k) &= a_{k_1} + \lambda b_{k_1} + a_{k_2} + \lambda b_{k_2} + ... + a_{k_m} + \lambda b_{k_m} \\ &= (a_{k_1} + a_{k_2} + ... + a_{k_m}) + \lambda(b_{k_1} + b_{k_2} + ... + b_{k_m}) \\ &= \sum_{k\in I} a_k + \lambda \sum_{k\in I} b_k.\end{aligned}$$

2. Notons $I = \{k_1, ..., k_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors, comme le produit a $n-p+1$ termes, on a

$$\prod_{k=p}^{n}(\lambda a_k) = \left(\lambda a_{k_1}\right)\left(\lambda a_{k_2}\right)...\left(\lambda a_{k_m}\right) = \lambda^{n-p+1} a_{k_1} a_{k_2} ... a_{k_m} = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k.$$

3. On a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = 1 + 1 + ... + 1$ et il y a $n-p+1$ termes dans cette somme, d'où $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.

4. En notant $\displaystyle S = \sum_{k=p}^{n} k$, on a

$$\begin{aligned}S &= p + (p+1) + ... + n - 1 + n \\ S &= n + (n-1) + ... + (p+1) + p.\end{aligned}$$

Cette somme ayant $n-p+1$ termes, cela implique, en sommant les deux expressions précédentes terme à terme, que $2S = (n+p)(n-p+1)$, et donc finalement

$$S = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}.$$

5. Soit $q \neq 1$, on note $\displaystyle S = \sum_{k=p}^{n} q^k$, alors on a

$$\begin{aligned}S &= q^p + q^{p+1} + ... + q^{n-1} + q^n \\ qS &= q^{p+1} + q^{p+2} + ... + q^n + q^{n+1},\end{aligned}$$

et donc $S - qS = q^p - q^{n+1}$. On obtient ainsi $(1-q)S = q^p - q^{n+1}$, et donc

$$S = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}.$$

2 Nombres de parties d'un ensemble à n éléments

Soit E un ensemble à n éléments, alors il contient, pour tout $k \in \{0,...,n\}$, $\binom{n}{k}$ parties à k éléments, et donc le nombre total de parties possibles est, en utilisant la formule de binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

3 Preuve du 3.a) de la Proposition 2.2 : Loi de De Morgan

Soient P et Q deux propositions, alors on a la table de vérité suivante :

P	Q	non(P)	non(Q)	P ou Q	non(P ou Q)	non(P) et non(Q)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

donc "non(P ou Q)" et "non(P) et non(Q)" ont les mêmes valeurs de vérité.

4 Proposition 3.15 (distributivité) : première égalité

Soit I un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble, alors

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B &\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ ou } x \in B \\ &\iff (\forall i \in I, x \in A_i) \text{ ou } x \in B \\ &\iff \forall i \in I, (x \in A_i \text{ ou } x \in B) \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B). \end{aligned}$$