
Équivalence de prédicats

Le but de ce document est de montrer comment bien présenter et rédiger une équivalence de prédicats. Commençons pas rappeler que ce type de question peut être posée de plusieurs façons :

- Montrer que P et Q ont même valeurs de vérité ;
- Montrer que P et Q sont équivalents ;
- Montrer que $P \iff Q$.

(les parties en bleu sont des commentaires).

Enoncé : Soient P et Q deux propositions. Montrer que

$$(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \text{ équivaut à } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R).$$

En effet, on a :

$$(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$$

$$\iff \text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \quad (\text{par définition de l'implication}),$$

$$\iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } R \quad (\text{par la loi de De Morgan}),$$

$$\iff (\text{non}(P) \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R) \quad (\text{par distributivité}),$$

$$\iff (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \quad (\text{par définition de l'implication}).$$

On cherche donc à :

- 1. exprimer les implications en terme de disjonction,*
- 2. exprimer les négations à l'aide des lois de De Morgan,*
- 3. utiliser la distributivité des "ou" et "et" (bien mettre les parenthèses pour que ce soit clair),*
- 4. bien écrire le fait que ces propositions sont équivalentes (elles ont mêmes valeurs de vérité).*