

Mini-DM 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$ (date butoir : 26/09/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 1.1 : Soient x et y deux réels non-nuls tels que $x - y^2 = 1$. Calculer $\left(\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2} \right)^{2025}$.

Exercice 1.2 : Montrer que $\sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 29$.

Réponse :

Correction Mini-DM 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$

Merci de lire les remarques en rouge, et cela pour les deux exercices !

Exercice 1.1 : Soient x et y deux réels non-nuls tels que $x - y^2 = 1$. Calculer $\left(\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2} \right)^{2025}$.

Correction. Soient x et y deux réels tels que $x - y^2 = 1$. On remarque que

$$x^3 - y^6 = x^3 - (y^2)^3 = (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4) = x^2 + xy^2 + y^4,$$

et donc

$$\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2} = \frac{x^2 + xy^2 + y^4 - (x + y^2)^2}{xy^2} = \frac{x^2 + xy^2 + y^4 - x^2 - 2xy^2 - y^4}{xy^2} = -\frac{xy^2}{xy^2} = -1.$$

On obtient donc $\left(\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2} \right)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$ car 2025 est impair.

Remarques après correction.

- Toujours introduire les variables/paramètres en début de preuve. De quels x et y parle-t-on ? A quels ensembles de nombres appartiennent-ils ?
- Entre des nombres, pour signifier qu'ils sont égaux, on met des symboles "=" et surtout pas de symbole " $\Rightarrow$ " ni " $\Longleftrightarrow$ " qui se placent entre les équations, inéquations, ou propositions mathématiques.
- Il vous faut donc organiser votre calcul de manière à pouvoir mettre des signes = entre les quantités (nombres, expressions algébriques).
- Si vous avez écrit $y^2 = x - 1$ et donc $y = \sqrt{x - 1}$, vous avez oublié le cas $y = -\sqrt{x - 1}$.

Exercice 1.2 : Montrer que $\sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 29$.

Correction. En multipliant par l'expression conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{840} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k} \\ &= \sum_{j=1}^{841} \sqrt{j} - \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k} \\ &= \sqrt{841} = 29, \end{aligned}$$

où on a posé $j = k+1$ dans la première somme (on peut aussi directement utiliser la proposition portant sur les sommes télescopiques).

Remarques après correction.

- Si vous écrivez que $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, alors il faut rajouter "pour tout $k \in \mathbb{N}$ " (on présente toujours les variables/paramètres).
- Par contre, inutile d'écrire "pour tout $k \in \mathbb{N}$ " si vous travaillez directement avec les sommes (comme dans la correction ci-dessus), puisque la somme à calculer ne dépend pas de la variable k (je peux changer le nom de cette variable sans changer le résultat).
- Entre des nombres, pour signifier qu'ils sont égaux, on met des symboles "=" et surtout pas de symbole " $\Rightarrow$ " ni " $\iff$ " qui se placent entre les équations, inéquations, ou propositions mathématiques.
- Ecrire $\sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ est faux et n'a aucun sens !

Mini-DM 2 : Logique et raisonnements (date butoir : 10/10/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 2.1 : Le but de cet exercice est de démontrer deux résultats laissés en exercices en CM et de traiter un exemple.

1. (*Loi de De Morgan*) Soient P et Q deux propositions. Montrer, en utilisant une table de vérité, que $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalent à $(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.
2. (*Raisonnement par l'absurde*) Soit P une proposition. Montrer, sans utiliser de table de vérité, que, pour toute proposition Q ,

P est équivalent à " $(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$ ".

3. Montrer par l'absurde que, pour tout entiers relatifs a et b , on a

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Exercice 2.2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Réponse.

Correction Mini-DM 2 : Logique et raisonnements

Exercice 2.1 : Le but de cet exercice est de démontrer deux résultats laissés en exercices en CM et de traiter un exemple.

1. (*Loi de De Morgan*) Soient P et Q deux propositions. Montrer, en utilisant une table de vérité, que $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalent à $(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.
2. (*Raisonnement par l'absurde*) Soit P une proposition. Montrer, sans utiliser de table de vérité, que, pour toute proposition Q ,

P est équivalent à $(\text{non}(P) \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$.

3. Montrer par l'absurde que, pour tout entiers relatifs a et b , on a

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Correction.

1. On construit la table de vérité comme suit

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Ainsi, $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et $(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$ ont les mêmes valeurs de vérité, elles sont donc équivalentes.

2. On a

$$\begin{aligned} & (\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)) \\ \iff & (P \text{ ou } \text{non}(Q)) \text{ et } (P \text{ ou } Q) \\ \iff & P \text{ ou } (\text{non } Q \text{ et } Q) \\ \iff & P \end{aligned}$$

car $(\text{non } Q \text{ et } Q)$ est une contradiction (toujours fausse), donc les valeurs de vérités de la proposition " $P \text{ ou } (\text{non } Q \text{ et } Q)$ " sont exactement celles de P .

3. Soit $P : \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0$. On suppose $\text{non}(P)$, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $b \neq 0$. Alors, comme $b \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc P est vraie.

Remarques après correction.

- Quelques un.es oublient la conclusion après la table de vérité, attention !
- A la question 2., il était plus simple/rapide de travailler directement avec les prédicats, plutôt que de faire des cas (P vrai, P faux).

- Question 3 : attention à ce que vous supposez quand vous raisonnez par l'absurde. Pour montrer une propriété P, il faut supposer non(P). Ici P est une implication de type " $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, A \implies B$ ", donc il fallait supposer " $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, A$ et non(B)" pour aboutir proprement à une contradiction.

Exercice 2.2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$P(n) : u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $u_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. En effet, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

donc $P(n+1)$ est vraie. On a donc montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Remarques après correction.

- La rédaction proposée en cours et dans la fiche méthodologique sur le site de l'UE est **obligatoire**, et on ne peut pas tellement s'en écarter sans dire de bêtise :
 - Il faut définir la propriété/proposition P (cf. correction). De plus, écrire " u_n est vraie" n'a pas de sens.
 - Pour l'hérédité, on n'écrit surtout pas : "*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$.*" ou bien "*On suppose $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*" car faire cela, c'est déjà supposer que la propriété $P(n)$ est vraie tout le temps, donc il sera clair que $P(n+1)$ le sera aussi, sans faire de calcul ! C'est absurde !! Même chose si vous écrivez "*On suppose $P(n)$ vrai à partir d'un certain rang*", car cela veut dire que vous supposez que la propriété est vraie d'un certain indice jusqu'à l'infini, ce qu'il ne faut évidemment pas faire !
 - La conclusion doit être écrite, en spécifiant que vous avez utilisé un raisonnement par récurrence.
- Pour l'initialisation, on doit bien comprendre que vous avez calculé (ou juste recopié) d'un côté u_1 et de l'autre la valeur donnée par la formule que vous voulez démontrer.
- Pour l'hérédité, inutile de prendre une autre lettre pour l'indice, n suffit parfaitement ! Certain.es ont j'imagine confondu avec le raisonnement par récurrence forte où on doit supposer que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et où n a été fixé préalablement. C'est un raisonnement différent qu'il ne fallait pas utiliser ici !

Mini-DM 3 : Ensembles et applications (date butoir : 24/10/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 3.1 : On pose

$$E = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} : k \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que $E \subset F$.
2. Y a-t-il égalité entre les ensembles E et F ?
3. On considère l'ensemble $\Lambda = E - E = \{z = x - y : x \in E, y \in E\}$.
 - a) Montrer que $\Lambda \subset F$.
 - b) **BONUS (plus difficile) :** Montrer que $\Lambda \neq F$.

Exercice 3.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x . Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Réponse.

Correction Mini-DM 3 : Ensembles et applications

Exercice 3.1 : On pose

$$E = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} : k \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que $E \subset F$.
2. Y a-t-il égalité entre les ensembles E et F ?
3. On considère l'ensemble $\Lambda = E - E = \{z = x - y : x \in E, y \in E\}$.
 - a) Montrer que $\Lambda \subset F$.
 - b) **BONUS (plus difficile) :** Montrer que $\Lambda \neq F$.

Correction.

1. Soit $x \in E$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{k(k+1)}$. De plus, on a

$$x = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

et donc, comme $k \in \mathbb{N}^*$ et $k+1 \in \mathbb{N}^*$, alors $x \in F$. Donc $E \subset F$.

2. On remarque que $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \in F$ (par exemple pour $m = n = 2$), alors que $\frac{1}{k(k+1)} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui veut dire que $0 \notin E$. Donc $F \not\subset E$ et donc $E \neq F$.
3. a) Si $z \in \Lambda = E - E$, alors il existe $x, y \in E$ tel que $z = x - y$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$z = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)},$$

qui est sous la forme $z = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ avec $n = k(k+1) \in \mathbb{N}^*$ et $m = k'(k'+1) \in \mathbb{N}^*$, donc $z \in F$ et ainsi $\Lambda \subset F$.

- b) Soit $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \in F$. Montrons que $z_0 \notin \Lambda$. Par l'absurde, supposons que $z_0 \in \Lambda$, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)}.$$

On raisonne maintenant par disjonction de cas sur k :

- si $k = 1$, alors $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ et on doit nécessairement avoir $\frac{1}{k'(k'+1)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $k'(k'+1) = 3$, ce qui n'est pas possible avec $k' \in \mathbb{N}^*$ puisque $k'(k'+1)$ est forcément divisible par 2 (vu en CM comme exemple de raisonnement par disjonction de cas).
- si $k \geq 2$, alors $k(k+1) \geq 6$ et donc $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{6}$, donc, comme pour tout $k' \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k'(k'+1)} > 0$, alors $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)} < \frac{1}{6}$ ce qui est impossible.

On en déduit donc que $z_0 \notin \Lambda$, et donc que $F \not\subset \Lambda$, c'est-à-dire que $\Lambda \neq F$.

Remarques après correction.

- On a $x \in E \implies \exists k \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{k(k+1)}$. La preuve de 1. devait commencer comme ça ! Pour montrer une inclusion, on prend un élément du premier ensemble et on montre qu'il appartient nécessairement à l'autre ensemble, ce qui montre l'inclusion.
- Il fallait montrer que l'équation $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{3}$ (ou $\frac{3}{10}$) n'admettait pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x . Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Correction. Il est clair que $f(\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$, donc si $m \in \mathbb{N}$ est impair, il n'admet pas d'antécédent par f , donc f n'est pas surjective. Pour montrer l'injectivité, soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, alors

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2,$$

donc f est injective.

Soit $m \in \mathbb{N}$, alors il est clair que $g(2m) = E\left(\frac{2m}{2}\right) = E(m) = m$ puisque m est un entier, et donc m admet au moins un antécédent par g ($2m$), donc g est surjective.

Comme $g(0) = g(1) = 0$ et que $0 \neq 1$, on en déduit que g n'est pas injective.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f \circ g(n) = f(g(n)) = 2E\left(\frac{n}{2}\right)$. Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et donc

$$f \circ g(n) = 2E(k) = 2k = n.$$

Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$ et donc, comme $E\left(k + \frac{1}{2}\right) = k$, on a

$$f \circ g(n) = 2E\left(\frac{2k+1}{2}\right) = 2E\left(k + \frac{1}{2}\right) = 2k = n - 1.$$

On a aussi $g \circ f(n) = g(f(n)) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$. Ainsi, $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident sur $2\mathbb{N}$ mais pas sur $2\mathbb{N} + 1$. En particulier, $f \circ g \neq g \circ f$.

Remarques après correction.

- Beaucoup oublient d'introduire les variables. Par exemple, pour prouver l'injectivité de f , on doit :
 - a) écrire "Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ " pour définir n_1 et n_2 (cette partie est généralement oubliée dans vos copies !);
 - b) puis supposer que $f(n_1) = f(n_2)$;
 - c) par des arguments logiques, on déduit que $n_1 = n_2$.

De plus, il ne FAUT PAS mélanger les "donc" et les " $\implies$ " en écrivant par exemple "on suppose $f(n_1) = f(n_2)$ donc $2n_1 = 2n_2 \implies n_1 = n_2$ ". Mieux vaut écrire les choses comme dans la correction, ou bien : " $f(n_1) = f(n_2)$ donc $2n_1 = 2n_2$ donc $n_1 = n_2$ ".

- Attention aux ensembles : on peut écrire " $n, n' \in \mathbb{N}$ " ou " $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ ", mais ON N'ECRIT PAS " $n, n' \in \mathbb{N}^2$ " ou bien " $(n, n') \in \mathbb{N}$ ".
- Il est inutile de rappeler les définitions (injectivité, surjectivité) avant de faire les raisonnements (vous perdez du temps).
- Pour montrer qu'une application n'est pas injective (ou n'est pas surjective), un contre-exemple suffit généralement ! Ne faites pas un raisonnement par l'absurde si c'est pour finalement donner un contre-exemple.
- La contraposée de " $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, g(n_1) = g(n_2) \implies n_1 = n_2$ " N'EST PAS " $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, g(n_1) \neq g(n_2) \implies n_1 \neq n_2$ ". Il s'agit en fait de (revoir le cours !)

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, n_1 \neq n_2 \implies g(n_1) \neq g(n_2).$$

- On dit que " f est injective" et NON PAS " $f(n)$ est injective" car f est une application alors que $f(n)$ est un nombre !
- Attention : $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ g(n) = n = \text{Id}_{\mathbb{N}}(n)$ (et NON PAS " $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ " tout court, puisque ces quantités sont des nombres !).
- Il fallait expliquer pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}, 2E\left(\frac{n}{2}\right) \neq E(n)$ (en prenant $n = 1$ par exemple).
- Ecrire " $f \circ g = g \circ f$ pour n pair" n'a pas de sens ! Mieux vaut écrire " $f \circ g = g \circ f$ sur $2\mathbb{N}$ " ou bien " $f \circ g(n) = g \circ f(n)$ pour n pair".
- Evitez de parler de dérivée de f , puisque la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{N}$!! Ou alors il faut parler de restriction de $x \mapsto 2x$ à $\mathbb{N}$, mais ça peut être délicat à écrire.
- On ne peut pas utiliser le Théorème des Valeurs Intermédiaires et la continuité pour des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ (ou alors parler de restriction comme au point précédent).
- Il ne fallait pas étudier l'injectivité et la surjectivité de $f \circ g$ et $g \circ f$. Restez bien dans le cadre des questions !
- Gardez la notation E pour la partie entière, sinon cela peut donner l'impression que vous avez recopié le résultat quelque part (IA générative ou autre). De manière générale, on s'attend à ce que seulement le vocabulaire du cours soit utilisé lors des évaluations.

Mini-DM 4 : Nombres complexes (date butoir : 14/11/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 4.1 : Déterminer les racines carrées de $\omega = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ sous forme algébrique puis exponentielle et en déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 4.2 : Ecrire $\sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{(1+i)^k}$ sous forme algébrique.

Réponse.

Correction Mini-DM 4 : Nombres complexes

Exercice 4.1 : Déterminer les racines carrées de $\omega = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ sous forme algébrique puis exponentielle et en déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Correction. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \omega$. On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on a donc $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ce qui nous permet d'écrire, par identification et en calculant le carré du module :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 = |z|^2 = |\omega| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ 2xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En ajoutant les deux premières lignes, on obtient $2x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, donc $x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$ et donc $x = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

En soustrayant les deux premières lignes, on obtient $2y^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc, de même, $y = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. D'après la troisième ligne, les deux réels x et y ont même signe, donc on trouve finalement

$$z = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

On note maintenant $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et on trouve

$$z^2 = \omega \iff \left(re^{i\theta}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \iff r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

On trouve donc que $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0, 1\}$, ce qui permet de dire que les deux racines carrées de ω sont, sous forme exponentielle,

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_1 = e^{i\frac{13\pi}{12}}.$$

Les parties réelles et imaginaires de z_0 (respectivement z_1) étant positives (respectivement négatives), on obtient donc que $z_0 = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et comme $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puisque ces cos et sin sont nécessairement positifs car l'angle est entre 0 et $\pi/2$, on a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

On peut aussi remarquer (en élevant au carré) que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que, de même, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Remarques après correction.

- Attention à bien comprendre l'esprit de l'exercice : ici on calcule de deux manières différentes les racines carrées de w pour raisonner par identification à la fin. Si vous utilisez les formules de trigonométrie pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ ou bien $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$ pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, vous passez complètement à côté de l'exercice. Regardez bien, il est écrit "en déduire", donc vous devez utiliser ces racines carrées pour conclure (et non pas les formules de trigonométrie).

- Il faut être capable de retrouver clairement le système permettant de calculer les racines carrées sous forme algébrique, comme on l'a fait dans la preuve du résultat en CM.
- Pour la résolution du système, relire les notes de cours, car certain.es passent par des calculs un peu trop "risqués" (équation bicarrée).
- On n'écrit JAMAIS $\sqrt{w}$ pour $w \in \mathbb{C}$ (à part quand w est un réel positif).
- Si vous ne justifiez pas proprement que (par exemple) $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cela sous-entend que vous avez recopié ce résultat quelque part (car ça ne saute pas aux yeux)...

Exercice 4.2 : Ecrire $\sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{(1+i)^k}$ sous forme algébrique.

Correction. Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = \frac{1}{1+i}$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1}{1+i} \frac{1-q^{2026}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-q^{2026}}{1+i-1} = \frac{1-q^{2026}}{i} = -i(1-q^{2026}).$$

On remarque maintenant que $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2}$. De plus, on a

$$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

et, en notant θ un argument de $1-i$, on a

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. On obtient ainsi, en constatant que

$$\frac{2026\pi}{4} = \frac{2024\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{2},$$

avec $506 = 2 \times 253 \in 2\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{(1+i)^k} = -i \left(1 - e^{-i\frac{2026\pi}{4}} 2^{-1013} \right) = -i \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{-1013} \right) = -i(1 + i2^{-1013}) = 2^{-1013} - i.$$

Remarques après correction.

- L'expression finale doit être sous forme algébrique, donc de la forme $a+ib$ avec a et b des réels. Si vous obtenez une expression où il y a encore du $(1+i)^{2026}$, c'est que votre calcul n'est pas terminé...!

Mini-DM 5 : Arithmétique (date butoir : 28/11/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 5.1 : Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $X = \mathbb{P} \cap (4\mathbb{N} + 3)$ l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Le but de cet exercice est de montrer que X est infini.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer $4\mathbb{N} + 1$ est stable par multiplication.
3. On suppose que X est fini et on écrit $X = \{p_1, \dots, p_n\}$. Soit $N = 4 \prod_{i=1}^n p_i - 1$.

Montrer par l'absurde que N admet un diviseur $p \in X$.

Indication : si N n'admet aucun diviseur premier de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors tous les diviseurs premiers de N sont de la forme $4k + q$ où q est facile à trouver.

4. En déduire que X est infini.

Correction.

1. Le nombre $p = 3$ est premier et s'écrit $p = 4 \times 0 + 3$, avec $0 \in \mathbb{N}$, donc $p \in X$ et $X \neq \emptyset$.
2. Soit $m, n \in 4\mathbb{N} + 1$, alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $m = 4k + 1$ et $n = 4k' + 1$. On a donc

$$mn = (4k + 1)(4k' + 1) = 4kk' + 4k + 4k' + 1 = 4(kk' + k + k') + 1 \in 4\mathbb{N} + 1,$$

car $kk' + k + k' \in \mathbb{N}$. Ainsi, $4\mathbb{N} + 1$ est stable par multiplication.

3. On sait que N admet des diviseurs premiers. Supposons qu'aucun de ses diviseurs n'appartienne à X , cela veut dire qu'aucun de ses diviseurs n'est dans l'ensemble $4\mathbb{N} + 3$. Comme ces nombres sont premiers et que $N \in 4\mathbb{N} - 1$ est impair, ils ne peuvent pas être dans $4\mathbb{N}$ ou $4\mathbb{N} + 2$ (sinon ils seraient pairs), donc ils appartiennent nécessairement à l'ensemble $4\mathbb{N} + 1$. Comme N est le produit de ses diviseurs premiers, alors par la question 2., $\exists k \in \mathbb{N}$, $N = 4k + 1$. On obtient donc

$$4k + 1 = 4 \prod_{i=1}^n p_i - 1,$$

et ainsi $4 \prod_{i=1}^n p_i = 4k + 2$, donc $2k + 1 = 2 \prod_{i=1}^n p_i$, ce qui est impossible car le membre de droite est impair et celui de gauche est pair. Ainsi, N admet nécessairement un diviseur premier $p \in X$.

4. Soit $p \in X$ tel que $p|N$. Alors $p \mid \left(N - \prod_{i=1}^n p_i \right)$ car $p \in X$, donc $p|1$, ce qui est impossible. Ainsi, X est infini.

Exercice 5.2 : Déterminer le chiffre des unités de 7^{7^7} .

Indication : le chiffre des unités d'un entier est son reste dans la division euclidienne par 10.

Correction. On commence par remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a

$$7^{4k+i} = (7^4)^k \times 7^i = (49 \times 49)^k \times 7^i \equiv (9 \times 9)^k \times 7^i [10] \equiv 7^i [10] \equiv \begin{cases} 1[10] & \text{si } i = 0 \\ 7[10] & \text{si } i = 1 \\ 9[10] & \text{si } i = 2 \\ 3[10] & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Cela montre que les puissances de 7 sont, modulo 10, cycliques de période 4. De plus,

$$7^7 \equiv 3^7 [4] \equiv (3^3)^2 \times 3 [4] \equiv 3^2 \times 3 [4] \equiv 3 [4],$$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$, $7^7 = 4k + 3$ et donc $7^{7^7} \equiv 3 [10]$, ce qui veut dire que le chiffre des unités de ce nombre est 3.

Remarques après correction.

- Attention : $7^{7^7} \neq (7^7)^7$, puisque $(7^7)^7 = 7^{49}$ et $49 \neq 7^7$.
- On ne peut PAS utiliser le fait que si $a \equiv a' [m]$ et $b \equiv b' [m]$, alors $c^{a \times b} \equiv c^{a' \times b'} [m]$ avec $c \in \mathbb{N}$. Il faut se restreindre à utiliser les propriétés vues en CM.
- On ne pouvait évidemment pas utiliser directement le petit Théorème de Fermat dans la congruence modulo 10, puisque 10 n'est pas un nombre premier !

Mini-DM 6 : Polynômes (date butoir : 05/12/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 6.1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha = X^4 + \alpha X^3 + 10X^2 + 12X + 8 \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que -2 est racine double de P_α . Montrer que $\alpha = 5$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction.

1. Comme -2 est racine de P_α , alors

$$P_\alpha(-2) = 16 - 8\alpha + 40 - 24 + 8 = 0$$

d'où $40 - 8\alpha = 0$ et donc $\alpha = 5$.

2. Comme -2 est racine double de P_5 , $(X + 2)^2$ divise P_5 et on a, par division euclidienne,

$$P_5 = (X + 2)^2 (X^2 + X + 2).$$

Le discriminant du polynôme $X^2 + X + 2$ vaut $\Delta = 1^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 < 0$ donc $X^2 + X + 2$ est irréductible et la factorisation de P_5 dans $\mathbb{R}[X]$ est $(X + 2)^2 (X^2 + X + 2)$.

3. Dans $\mathbb{C}[X]$, on calcule les racines de $X^2 + X + 2$ qui sont

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

et on a donc

$$P_5 = (X + 2)^2 \left(X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \right) \left(X + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \right)$$

Remarques après correction.

- Dans la question 1., le fait que -2 soit racine double donne trop d'information. Il suffisait juste d'utiliser le fait que -2 était racine de P_α .
- Pour la factorisation dans la question 2., faire la division euclidienne par $(X + 2)^2 = X^2 + 4X + 4$ est BEAUCOUP plus rapide que de faire une identification avec des coefficients.
- Attention : factoriser P_5 dans $\mathbb{R}[X]$ signifie l'écrire comme produit de facteurs irréductibles, c'est-à-dire de degré 1 ou de degré 2 avec discriminant négatif. Il fallait donc ne pas oublier que le discriminant de $X^2 + X + 2$ vaut $\Delta = -7 < 0$ (dans la question 2., pas seulement la 3.).

Exercice 6.2 : Soit $n \geq 3$, montrer que $P_n = X^n - nX + 1$ n'admet que des racines simples.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Correction. Soit $n \geq 3$. Supposons que P_n admette une racine double α , alors

$$P_n(\alpha) = \alpha^n - n\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad P'_n(\alpha) = n\alpha^{n-1} - n = 0.$$

La deuxième équation donne $\alpha^{n-1} = 1$, donc $\alpha^n = \alpha$ et ainsi, comme $\alpha^n - n\alpha + 1 = \alpha - n\alpha + 1 = \alpha(1 - n) + 1$, la première équation donne, puisque $n \neq 1$,

$$\alpha(1 - n) + 1 = 0 \iff \alpha = \frac{1}{n-1}$$

qui ne vérifie pas $\alpha^n = 1$ car $n \neq 2$. On a donc une contradiction, et donc P_n n'admet que des racines simples.

Remarques après correction.

- Si vous obtenez $\alpha^{n-1} = 1$ et que vous en déduisez que α vaut 1 ou -1 , c'est que vous avez restreint l'espace des solutions à $\mathbb{R}$, ce qui n'a aucun intérêt ici (ce serait en effet bien trop facile), et vous passez donc totalement à côté des difficultés de l'exercice !