

Factorisation d'un polynôme

Le but de ce document est d'expliquer comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$. *(les parties en bleu sont des commentaires).*

Enoncé 1 : Factoriser le polynôme $2X^2 + 5X + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Les polynômes du second degré se factorise facilement, en se rappelant que l'on a la factorisation $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du polynômes, s'ils elles existent dans l'ensemble que l'on considère.

Le discriminant du polynôme est $\Delta = 5^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$, donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2.$$

On a donc $2X^2 + 5X + 2 = 2(X + \frac{1}{2})(X + 2)$. *(La factorisation est évidemment la même dans $\mathbb{R}[X]$ car les racines sont réelles)*

Enoncé 2 : Factoriser le polynôme $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

On calcule facilement les racines de ce polynômes *(Dans ce cas, calculer le discriminant est maladroit !)* :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff x \in \{i, -i\}.$$

Ainsi, le polynôme n'admet pas de racine réelle, il est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (on ne peut pas le factoriser). De plus, sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i).$$

Enoncé 3 : Factoriser le polynôme $X^3 + X^2 + X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

On a $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$. De plus, le discriminant de $X^2 + X + 1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$ donc $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation est $X(X^2 + X + 1)$.

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont donc complexes et valent

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}.$$

Ainsi, $X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - \bar{j})$. *(Comme celle de i , la notation $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est fixée !)*

Enoncé 4 : Factoriser le polynôme $P = X^3 + X^2 - X - 1$.

Si le polynôme n'est pas du second degré et ne se factorise pas directement par une puissance de X , il faut chercher des racines évidentes (en essayant 1, -1, 2 ou -2).

On remarque que $P(1) = 0$, donc 1 est racine de P et on a, par division euclidienne :

$$P = (X - 1)(X^2 + 2X + 1)$$

qui se factorise facilement en $P = (X - 1)(X + 1)^2$.

(On aurait aussi pu voir facilement que $P(-1) = 0$, et factoriser P aussi par $(X + 1)$ ce qui aurait donné $P = (X + 1)(X - 1)(X + 1)$ et donc le résultat voulu.)

Enoncé 5 : Soit $n \geq 2$, factoriser $P = X^n - 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.

Les racines de P sont données par les racines de l'équation d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ donnée par $z^n = 1$. Ce sont donc les racines n -ièmes de 1 qui sont données par

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}},$$

et donc on factorise P comme suit :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right).$$

Enoncé 6 : Factoriser $P = X^4 - 11X^3 + 29X^2 - 11X + 28$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbf{C}[X]$, en remarquant que i est racine de P .

On commence par vérifier que $P(i) = i^4 - 11i^3 + 29i^2 - 11i + 28 = 1 + 11i - 29 - 11i + 28 = 0$, donc i est bien racine de P . Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et que i est racine de P , son conjugué $-i$ est aussi racine de P , donc P est divisible par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ et on obtient, par division euclidienne,

$$P = (X^2 + 1)(X^2 - 11X + 28).$$

Le discriminant de $X^2 - 11X + 28$ vaut $\Delta = (-11)^2 - 4(1)(28) = 9 > 0$, donc ce polynôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{11+3}{2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11-3}{2} = 4.$$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc, comme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$,

$$P = (X^2 + 1)(X - 7)(X - 4),$$

alors que sa factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ est

$$P = (X - i)(X + i)(X - 7)(X - 4).$$

*On voit ici que le fait qu'un complexe ET son conjugué sont toujours tous les deux racines d'un polynôme à coefficients **réels**, est clairement nécessaire pour factoriser P , si on ne peut pas trouver de racine évidente. Une fois que vous savez que $X - z_0$ et $X - \overline{z_0}$ divisent P , alors $(X - z_0)(X - \overline{z_0})$ divise P et on a (cf. chapitre sur les complexes)*

$$(X - z_0)(X - \overline{z_0}) = X^2 - (z_0 + \overline{z_0})X + z_0\overline{z_0} = X^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)X + |z_0|^2 \in \mathbb{R}[X],$$

(comme $\operatorname{Re}(z_0) \in \mathbb{R}$ et $|z_0|^2 \in \mathbb{R}$) qui divise P .