

Exercices supplémentaires - Polynômes

Exercice 1. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

$$P_1 = (X^2 - 3X + 2)^2 + X^2, \quad P_2 = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 8 \quad \text{et} \quad P_3 = X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25.$$

Exercice 2. Soit $P = X^6 + X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 7X^2 + X + 3$.

1. Montrer que i est racine double de P .
2. En déduire (sans calcul) une autre racine double de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer deux racines entières de P ainsi que leurs multiplicités.
2. Vérifier que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de P .
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

CORRECTION

Exercice 1.

- On utilise le fait que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ et donc

$$(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2 = (X^2 - 3X + 2 + iX)(X^2 - 3X + 2 - iX) = (X^2 + (i-3)X + 2)(X^2 - (3+i)X + 2)$$

On résout $X^2 + (i-3)X + 2 = 0$ par la méthode habituelle : le discriminant vaut $\Delta = (i-3)^2 - 4(1)(2) = -6i = 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$ dont les racines carrées sont $\delta = \pm\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et on trouve les solutions (à vous de faire le calcul !)

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

De même, pour $X^2 - (3+i)X + 2 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = (3+i)^2 - 4(1)(2) = 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ dont les racines carrées sont $\delta = \pm\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on trouve les solutions (à vous de faire le calcul !)

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Comme $x_1 = \overline{x_3}$, $x_2 = \overline{x_4}$, $|x_1| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ et $\arg(x_1) = -\frac{\pi}{6}$ (faire les calculs), on obtient

$$(X - x_1)(X - x_3) = X^2 - 2\operatorname{Re}(x_1)X + |x_1|^2 = X^2 - (3 - \sqrt{3})X + 4 - 2\sqrt{3}$$

et, comme $|x_2| = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et $\arg(x_2) = \frac{\pi}{6}$ (faire les calculs), on obtient

$$(X - x_2)(X - x_4) = X^2 - 2\operatorname{Re}(x_2)X + |x_2|^2 = X^2 - (3 + \sqrt{3})X + 4 + 2\sqrt{3}$$

Finalement :

- La factorisation de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$ est $P_1 = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.
- La factorisation de P_1 dans $\mathbb{R}[X]$ est $P_1 = (X^2 - (3 - \sqrt{3})X + 4 - 2\sqrt{3})(X^2 - (3 + \sqrt{3})X + 4 + 2\sqrt{3})$.
- Cherchons une racine multiple de P . On remarque que

$$P'(X) = 0 \iff 4X^3 + 6X^2 - 4X = 0 \iff 2X(2X^2 + 3X - 2) = 0 \iff X = 0 \text{ ou } 2X^2 + 3X - 2 = 0.$$

Le discriminant de $2X^2 + 3X - 2$ est $\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 25 > 0$ donc ses racines sont $\alpha_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$. Comme $P(0) \neq 0$, $P(1/2) \neq 0$ et $P(2) = 0$, on sait que -2 est racine double et on a donc, par division euclidienne

$$P_2(X) = (X + 2)^2(X^2 - 2X + 2).$$

Le discriminant de $X^2 - 2X + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = (2i)^2$, donc ses racines sont $x_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$ et $x_2 = 1 + i$. Finalement :

- La factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$ est $P_2 = (X + 2)^2(X - 1 + i)(X - 1 - i)$.
- La factorisation de P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ est $P_2 = (X + 2)^2(X^2 - 2X + 2)$.

- En faisant des essais, on remarque que i (et donc $-i$ car le polynôme est à coefficients réels) sont des racines de P_3 . Donc on a, par division euclidienne,

$$P_3 = (X^2 + 1)(X^4 - 6X^2 + 25).$$

Pour résoudre $X^4 - 6X^2 + 25 = 0$, on pose $Y = X^2$ et on résout $Y^2 + 6Y + 25 = 0$ de discriminant $\Delta = 6^2 - 4(25) = -68 = (8i)^2$ d'où les solutions

$$y_1 = \frac{-6 + 8i}{2} = -3 + 4i \quad \text{et} \quad y_2 = -3 - 4i.$$

Reste à trouver les racines carrées de $-3 + 4i$ et $-3 - 4i$ par la méthode habituelle (système) et on trouve comme solutions

$$S = \{2 + i, -2 - i, -2 + i, 2 - i\}.$$

On remarque que $(X - 2 - i)(X - 2 + i) = X^2 - 4X + 5$ et $(X + 2 + i)(X + 2 - i) = X^2 + 4X + 5$.
Finalement :

- La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est $P_3 = (X - i)(X + i)(X - 2 - i)(X + 2 + i)(X + 2 - i)(X - 2 + i)$,
- La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est $P_3 = (X^2 + 1)(X^2 - 4X + 5)(X^2 + 4X + 5)$.

Exercice 2. Soit $P = X^6 + X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 7X^2 + X + 3$.

1. On calcule $P' = 6X^5 + 5X^4 + 20X^3 + 14X + 1$ et on a $P(i) = P'(i) = 0$ (faire le calcul), donc i est racine double de P
2. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, le conjugué de i est aussi racine double de P , donc $-i$ est racine double de P .
3. Comme i et $-i$ sont racines doubles de P et que $(X - i)^2(X + i)^2 = (X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$, on a

$$P = (X^2 + 1)^2(X^2 + X + 3).$$

Le discriminant de $X^2 + X + 3$ est $\Delta = 1^2 - 4(1)(3) = -11 < 0$ donc les racines de $X^2 + X + 3$ sont

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}.$$

Finalement :

- La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est $P = (X - i)^2(X + i)^2 \left(X - \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}\right) \left(X - \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}\right)$,
- La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est $P = (X^2 + 1)^2(X^2 + X + 3)$.

Exercice 3. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

1. On remarque facilement que 0 et -1 sont des racines de P . Comme $P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$ et que $P'(0) = 7 \neq 0$ et $P'(-1) = -7 \neq 0$, ces deux racines sont d'ordre 1.

2. On utilise le fait que $1 + j + j^2 = 0$, donc $1 + j = -j^2$, d'où

$$P(j) = (j + 1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^{14} - j^7 - 1 = -e^{\frac{28i\pi}{3}} - e^{\frac{14i\pi}{3}} - 1 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1.$$

Comme $e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient bien que $P(j) = 0$, donc j est racine de P .

On a aussi $P'(j) = 7(j + 1)^6 - 7j^6 = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 7(j^{12} - j^6) = 7j^6(j^6 - 1) = 0$ car $j^6 = (j^3)^2 = 1^2 = 1$. Donc j est racine au moins double de P .

3. D'après la question précédente, et comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que $\bar{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ est aussi racine double de P . On a de plus $(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1$, donc, en remarquant que P est de degré 6 et en calculant $P^{(6)}$ (faites-le) et d'après la formule de Taylor, on obtient 7 comme coefficient dominant et on a

$$P = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2.$$

qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Pour celle dans $\mathbb{C}[X]$, on a

$$P = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2.$$