

## Exercices supplémentaires - Nombres Complexes

### Exercice 1. Racines cubiques de 1

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.
2. On note  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ .
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de  $j$ .

### Exercice 2. Racines carrées de nombres complexes Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1.  $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$ ,
2.  $z^2 = 3 - 4i$ .

### Exercice 3. Equations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes:

1.  $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$ ,
2.  $z^3 + 3z - 2i = 0$ ,
3.  $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$ ,
4.  $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
5.  $z^5 - z = 0$ .

## CORRECTION

### Exercice 1. Racines cubiques de 1

1. D'après le cours, les racines cubiques de 1 sont, comme  $1^{1/3} = 1, \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ . Les représenter sur le cercle unité est facile grâce aux angles (elles forment un triangle équilatéral).
2. On note que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est une racine cubique de 1 distincte de 1, donc  $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$ .
3. On a  $1 = j^3$  et  $e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$ . Les racines cubiques de 1 sont donc  $\{1, j, j^2\}$ .

### Exercice 2. Racines carrées de nombres complexes

1. Comme  $|-2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$  et

$$-2\sqrt{3} + 2i = 4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

alors, en notant  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ , on obtient que  $r^2 = 4$  et  $2\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \{0, 1\}$ . Finalement, on trouve

$$r = 2 \quad \text{et} \quad \theta = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \{0, 1\},$$

donc les solutions sont  $S = \{2e^{-i\frac{\pi}{12}}, 2e^{i\frac{11\pi}{12}}\}$ .

2. On pose  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et on obtient, comme  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$ ,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

En ajoutant les deux premières équations, on trouve  $2x^2 = 8$  donc  $x^2 = 4$  donc  $x \in \{-2, 2\}$  et en les soustrayant,  $2y^2 = 2$  donc  $y^2 = 1$  donc  $y \in \{-1, 1\}$ . La dernière équation nous donne que  $x$  et  $y$  sont de signes opposés, donc les solutions sont

$$S = \{2 - i, -2 + i\}.$$

### Exercice 3. Equations dans $\mathbb{C}$

1. Pour  $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$ , on calcule le discriminant puis on applique les formules.  $S = \{1 - 2i, 2 - i\}$ .
2. Pour  $z^3 + 3z - 2i = 0$ , on commence par remarquer que  $z = i$  est solution, puis on factorise par  $z - i$  et on trouve  $z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2) = (z - i)(z + 2i)(z - i)$  donc  $S = \{i, -2i\}$ .
3. Pour  $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$ , on pose  $Z = z^3$ , on résout  $Z^2 - (3 + 2i)Z + 2 + 2i = 0$  et on trouve  $Z \in \{1, 2 + 2i\}$ . Puis on cherche les racines cubiques de chacun de ces nombres complexes. On trouve  $S = \{1, j, j^2, -1 + i, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) + \frac{i}{2}(-1 - \sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2}(\sqrt{3} - 1)\}$ .

4. Pour  $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$ , on pose  $z = re^{i\theta}$  et on a donc  $r^7 e^{-7i\theta} = r^{-2} e^{-2i\theta}$ , et donc  $r^9 e^{-5i\theta} = 1$ , donc

$$r = 1 \quad \text{et} \quad -5\theta = 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Les solutions sont donc  $S = \{1, e^{-i\frac{\pi}{5}}, e^{-i\frac{2\pi}{5}}, e^{-i\frac{3\pi}{5}}, e^{-i\frac{4\pi}{5}}\}$ .

5. Pour  $z^5 - z = 0$ , on factorise  $z(z^4 - 1) = 0$  et donc on trouve  $z = 0$  ou  $z^4 = 1$  donc les solutions sont 0 et les quatre racines 4ièmes de 1.