

Exercices supplémentaires - Congruences

Exercice 1.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x \equiv 4 [7]$ et $y \equiv 2 [7]$. Montrer que $3x + y$ est divisible par 7.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x \equiv 4 [13]$ et $y \equiv 5 [13]$. Montrer que $x^2 + 2y$ est divisible par 13.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv 2 [5]$. Montrer que $n^4 + n - 3$ est divisible par 5.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $4^{3n} - 4^n$ est divisible par 5.
2. $7^{2n+1} + 1$ est divisible par 8.
3. $10^n - 1$ est divisible par 9.
4. $5^n + 19$ est divisible par 4.

Exercice 3.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

CORRECTION

Exercice 1.

1. On a $3x + y \equiv 12 + 2 [7] \equiv 14 [7] \equiv 0 [7]$, donc $3x + y$ est divisible par 7.
2. On a $x^2 + 2y \equiv 4^2 + 2(5) [13] \equiv 26 [13] \equiv 0 [13]$, donc $x^2 + 2y$ est divisible par 13.
3. On a $n^4 + n - 3 \equiv 2^4 + 2 - 3 [5] \equiv 16 + 2 - 3 [5] \equiv 15 [5] \equiv 0 [5]$, donc $n^4 + n - 3$ est divisible par 5.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $4^{3n} - 4^n = (4^3)^n - 4^n \equiv ((-1)^3)^n - (-1)^n [5] = (-1)^n - (-1)^n [5] \equiv 0 [5]$, donc cet entier est bien divisible par 5.
2. $7^{2n+1} + 1 = 7 \times (7^2)^n + 1 \equiv (-1) \times 1^n + 1 [8] \equiv 0 [8]$, donc cet entier est bien divisible par 8.
3. $10^n - 1 \equiv 1^n - 1 [9] \equiv 0 [9]$, donc cet entier est bien divisible par 9.
4. $5^n + 19 \equiv 1^n - 1 [4] \equiv 0 [4]$, donc cet entier est bien divisible par 4.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n} &= 25 \times 5^n + 3 \times 3^n \times (25)^n \equiv 4 \times 5^n + 3 \times 3^n \times 4^n [7] \equiv 4 \times 5^n + 3 \times (12)^n [7] \\ &\equiv 4 \times 5^n + 3 \times 5^n [7] \\ &\equiv 7 \times 5^n [7] \\ &\equiv 0 [7], \end{aligned}$$

donc cet entier est bien divisible par 7.