

Exercices supplémentaires - Ensembles et applications

Autour de la dénombrabilité

Exercice 1. Dénombrabilité

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ -2n-1 & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$ est bijective et en déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. On considère l'application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Montrer que φ est injective et en déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. Utiliser de même l'application $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 2. Théorème de Cantor

Soit E un ensemble et $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. On considère $A = \{x \in E : x \notin \varphi(x)\}$.

1. Montrer par un raisonnement par l'absurde qu'il n'existe pas d'élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) = A$.
2. En déduire le Théorème de Cantor, c'est-à-dire que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents.
3. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3. Non-dénombrabilité de $X^{\mathbb{N}}$

Soit X un ensemble ayant au moins deux éléments. On note $X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeur dans X .

Soit $(x_0, x_1) \in X^2$, avec $x_0 \neq x_1$ et φ l'application qui à une partie A de $\mathbb{N}$ associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} x_0 & \text{si } n \notin A \\ x_1 & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $X^{\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $X^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

CORRECTION

Exercice 1. Dénombrabilité

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors on a deux cas disjoints :

- si p est pair, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2n = f(n)$,
- si p est impair, alors il existe un unique $n \in \mathbb{Z}_-^*$ tel que $p = -2n - 1 = f(n)$.

Ainsi, f est bijective, donc $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont equipotents, donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $(n', p') \in \mathbb{N}^2$, alors

$$\varphi(n, p) = \varphi(n', p') \iff 2^n(2p+1) = 2^{n'}(2p'+1)$$

Puisque $2p+1$ et $2p'+1$ sont impairs, alors, si $n > n'$ (on raisonne de même pour $n' < n$), on obtient

$$2^{n-n'}(2p+1) = 2p'+1.$$

Comme l'entier de gauche est pair car $n - n' > 0$ et l'entier de droite est impair, ce n'est pas possible. Ainsi $n = n'$. On en déduit donc que $2p+1 = 2p'+1$ et donc $p = p'$.

On a donc montré que $(n, p) = (n', p')$ et donc que φ est injective.

Tout élément de $\mathbb{N}$ admet donc au plus un antécédent dans $\mathbb{N}^2$ par φ , donc on peut construire par restriction (sur les couples d'entiers ayant une image) une application $\tilde{\varphi} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ bijective et donc $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

3. Par définition de $\mathbb{Q}$, l'application ψ est surjective car, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q} = \psi(p, q)$. On peut donc de nouveau construire une application $\tilde{\psi}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$ (en ne gardant qu'un seul antécédent pour chaque rationnel) bijective. Comme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) \cup (\mathbb{Z}_-^* \times \mathbb{N}^*)$ est dénombrable, donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 2. Théorème de Cantor

1. Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) = A$, alors $\varphi(x_0) = \{x \in E : x \notin \varphi(x)\}$. Ainsi, par définition $x_0 \notin \varphi(x_0)$. Mais, si $x_0 \notin \varphi(x_0)$, alors $x_0 \in \varphi(x_0)$, on a donc une contradiction. Donc il n'existe pas de $x \in E$ tel que $\varphi(x) = A$.
2. Si E et $\mathcal{P}(E)$ étaient equipotents, alors il existerait $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ bijective, donc A aurait un antécédent par φ , mais c'est impossible par la question précédente. Donc E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas equipotents.
3. Ainsi, $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas equipotents, donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3. Non-dénombrabilité de $X^{\mathbb{N}}$

1. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $\varphi(A) = (a_n) = \varphi(B) = (b_n)$ avec $a_n = b_n = x_0$ si $n \notin A$ et $n \notin B$ c'est-à-dire si $n \in (A \cup B)^c$, et $a_n = b_n = x_1$ si $n \in A \cap B$.
Supposons que $A \neq B$, il existe donc un élément $n \in A$ tel que $n \notin B$ (même raisonnement pour le cas $n \notin A$ et $n \in B$) et donc $a_n = x_1 \neq x_0 = b_n$ ce qui n'est pas possible car $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $A = B$ et donc φ est injective.

2. Comme φ est injective et que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, alors il existe une bijection (on garde les éléments de $X^{\mathbb{N}}$ qui ont un unique antécédent) entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $X^{\mathbb{N}}$ et ainsi $X^{\mathbb{N}}$ ne peut pas être dénombrable.