

Exercices supplémentaires - Logique et raisonnements

Exercice 1. Logique

Montrer par disjonction de cas que dans un groupe de personnes non vide, il existe toujours une personne P telle que :

P a les yeux bleus $\Rightarrow$ toutes les personnes du groupe ont les yeux bleus.

Exercice 2. Implication

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 3. Récurrence et somme

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.

Exercice 4. Irrationalité de $\cos(1^\circ)$

On suppose ici que les angles sont exprimés en degrés.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos(n+1) = 2 \cos(n) \cos(1) - \cos(n-1)$.
2. On suppose ici que $\cos(1) \in \mathbb{Q}$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(n) \in \mathbb{Q}$.
3. Conclure que $\cos(1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Application du grand Théorème de Fermat

1. Chercher sur Internet l'énoncé précis du grand Théorème de Fermat.
2. Utiliser ce théorème pour montrer que $\sqrt[n]{2}$ est irrationnel pour tout entier $n \geq 3$.

CORRECTION

Exercice 1. Logique

On raisonne par disjonction de cas :

- si toutes les personnes du groupe ont les yeux bleus, alors on choisit n'importe quel P et l'implication est vraie ;
- s'il existe une personne P n'ayant pas les yeux bleus, alors on choisit cette personne P et l'implication est vraie.

Exercice 2. Implication

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$, alors on applique ce prédicat à $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a| < \frac{1}{n},$$

et en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient par encadrement que $|a| = 0$, donc $a = 0$.

Exercice 3. Récurrence et somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $P(n)$: " $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ ".

Initialisation : pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = (-1)^1 = -1$ et $\frac{(-1)^1(2 \cdot 1 + 1) - 1}{4} = \frac{(-1)(3) - 1}{4} = -1$, d'où l'égalité et donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(-2n-1+4(n+1))-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}, \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 4. Irrationalité de $\cos(1^\circ)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par parité du cosinus et imparité du sinus,

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1 + \cos n \cos(-1) - \sin(n) \sin(-1) = 2 \cos(n) \cos(1),$$

d'où l'égalité recherchée.

2. Supposons que $\cos(1) \in \mathbb{Q}$.

Initialisation : pour $n = 1$, $\cos(1) \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\cos(k) \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et montrons que $\cos(n+1) \in \mathbb{Q}$. En effet, comme dans ce cas $\cos(n)\cos(1) \in \mathbb{Q}$ comme produit de deux rationnels, et comme $\cos(n-1) \in \mathbb{Q}$ par hypothèse, on en déduit que $\cos(n+1) \in \mathbb{Q}$ par somme.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \in \mathbb{Q}$.

3. Comme, pour $n = 45^\circ \in \mathbb{N}^*$, $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel, on en déduit par l'absurde que $\cos(1^\circ) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Application du grand Théorème de Fermat

1. L'énoncé est : soit $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers strictement positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$.
2. Soit $n \geq 3$. Supposons par l'absurde que $\sqrt[n]{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}$, d'où $2q^n = p^n$ que l'on réécrit $q^n + q^n = p^n$, ce qui est impossible d'après le grand Théorème de Fermat. Donc $\sqrt[n]{2} \notin \mathbb{Q}$.