

Exercices supplémentaires - Sommes

Exercice 1. Sommes de puissances

Pour $n \in \mathbb{N}$, a déjà vu dans le cours comment calculer $S_1(n) = \sum_{k=0}^n k$ (symétrie de sommation, récurrence) et en Travaux Dirigés comment calculer $S_2(n) = \sum_{k=0}^n k^2$ (récurrence). L'objectif de cet exercice est d'utiliser une autre méthode permettant d'obtenir facilement les sommes de type $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on a

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)^2,$$

et en déduire la valeur de $S_1(n)$.

2. Utiliser la même idée que précédemment pour déterminer la valeur de $S_2(n)$, puis $S_3(n)$.

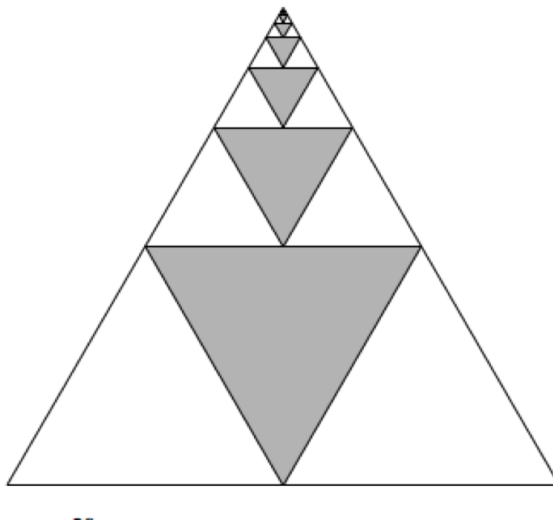
Exercice 2. Somme géométrique et dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, la valeur de $\sum_{k=1}^n kx^k$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kx^k$.

Exercice 3. Série géométrique

On suppose que l'aire du triangle équilatéral tracé ci-dessous vaut 1. Déterminer l'aire de la partie grise de deux manières différentes, illustrant ainsi la limite d'une certaine somme géométrique que l'on précisera.



CORRECTION

Exercice 1. Sommes de puissances

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1,$$

et, de plus, par télescopage des termes, on a aussi

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2 - 0^2 = (n+1)^2.$$

On a donc $2S_1(n) + (n+1) = (n+1)^2$, d'où

$$S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par télescopage des termes, on obtient

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3,$$

et on a aussi

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3S_2(n) + 3S_1(n) + (n+1).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{(n+1)^3 - 3S_1(n) - (n+1)}{3} = \frac{(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)}{3} \\ &= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

De même, on a $\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4$ mais aussi

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + (n+1),$$

d'où encore une fois l'égalité (après calculs)

$$S_3(n) = \frac{(n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - (n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2. Somme géométrique et dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La fonction est polynômiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ (le terme pour $k=0$ est 1 et sa dérivée est donc nulle).

2. Soit $x \notin \{0, 1\}$, alors, comme $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on obtient $f'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$

$$\sum_{k=1}^n kx^k = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = xf'_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, alors, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

mais aussi, puisque pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $nx^{n+k} = e^{\ln n + (n+k) \ln x} = e^{n \left(\frac{(n+k)}{n} \ln x + \frac{\ln n}{n} \right)} \rightarrow 0$ car $\ln x < 0$ et par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kx^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 3. Série géométrique

Imaginons que l'on colorie ainsi n triangle équilatéraux. Le premier correspond à $\frac{1}{4}$ du triangle total. Puis le second à $\frac{1}{4}$ d'un triangle équilatéral correspondant à $\frac{1}{4}$ du triangle total, etc. Au final, l'aire sera donc

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, l'aire de la partie grise est donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3}$.