

Contrôle Terminal du 12 janvier 2025

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

1. Énoncer la formule de Moivre (on ne demande pas la preuve).

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, c'est-à-dire $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, que peut-on dire de $\deg(P + Q)$ (on ne demande pas la preuve) ?

Correction. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, alors $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

3. Énoncer et démontrer le Lemme de Gauss.

Correction. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ tels que a et b sont premiers entre eux et $a|bc$. Alors $a|c$.

En effet, comme a et b sont premiers entre eux, il existe d'après le Théorème de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$. On a donc $auc + bcv = c$. Comme $a|bc$, alors $a|bcv$. De plus, $a|auc$, donc finalement $a|c$.

Exercice 2 Polynômes (1 + 1 + 1 + 1 = 4 points)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$ où -1 est une racine de P .

1. Montrer que $\alpha = 8$.

Correction. Comme -1 est racine de P , $P(-1) = 0$, et on a donc

$$P(-1) = 1 - 4 + 8 - 10 + \alpha - 4 + 1 = 0,$$

d'où $\alpha = 8$.

2. Montrer que -1 est une racine double de P .

Correction. Les deux premiers polynômes dérivées de P sont

$$P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4 \quad \text{et} \quad P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16.$$

Comme $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 2 \neq 0$, alors -1 est racine double de P .

3. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P en remarquant que j est racine de $X^2 + X + 1$.

Indication : On pourra calculer $(1 + X + X^2)^2$.

Correction. Comme -1 est racine double de P , P est divisible par $(X + 1)^2$ et la division euclidienne correspondante donne

$$P(X) = (X + 1)^2 (X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1).$$

On remarque que $(1 + X + X^2)^2 = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, et donc $P = (1 + X + X^2)^2 (X + 1)^2$.

Ainsi, P est divisible par $(1 + X + X^2)^2$. Comme de plus

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - j} = 0 \quad \text{et} \quad (j + 1)^2 \neq 0,$$

on en déduit que j est racine double de P .

4. Factoriser P , dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction. D'après la question précédente,

$$P = (1 + X + X^2)^2(X + 1)^2.$$

Comme le discriminant du polynôme $1 + X + X^2$ vaut $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$, on en déduit que la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est $P = (1 + X + X^2)^2(X + 1)^2$. De plus, j est racine de $1 + X + X^2$, donc la seconde racine de ce polynôme à coefficients réels est $\bar{j}$, et donc la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X + 1)^2.$$

Exercice 3 Nombres complexes (2.5 + 1.5 = 4 points)

1. Déterminer les racines carrées de $-15 - 8i$.

Correction. Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors on souhaite résoudre l'équation $z^2 = -15 - 8i$. On a donc $x^2 - y^2 + 2ixy = -15 - 8i$ et donc

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ |z|^2 = x^2 + y^2 = |-15 - 8i| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \\ 2xy = -8. \end{cases}$$

On obtient ainsi $2x^2 = -15 + 17 = 2$, donc $x \in \{-1, 1\}$ et de même $2y^2 = 17 + 15 = 32$ donc $y \in \{-4, 4\}$. Comme $xy = -4 < 0$, x et y sont de signes opposés et les racines carrées de $-15 - 8i$ sont donc $1 - 4i$ et $-1 + 4i$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

Correction. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(1)(5 + 5i) = -15 - 8i$. Ses racines carrées sont donc, d'après la question précédente, $1 - 4i$ et $-1 + 4i$ et les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{3 + 2i + 1 - 4i}{2} = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + 2i - 1 + 4i}{2} = 1 + 3i.$$

Exercice 4 Arithmétique (1 + 0.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $a_{n+1} = a_n^2 - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n})$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) &= (4^{2^n} + 2^{2^n} + 1)^2 - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) \\ &= (4^{2^n})^2 + (2^{2^n})^2 + 1 + 2 \cdot 4^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^n} + 2 \cdot 4^{2^n} \cdot 2^{2^n} - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) \\ &= 4^{2^{n+1}} + 2^{2^{n+1}} + 1 + 2 \cdot 4^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^n} + 2 \cdot 8^{2^n} - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) \\ &= 4^{2^{n+1}} + 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

b) En déduire que $a_{n+1} \equiv a_n^2 - 2a_n \pmod{7}$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n} \equiv 1^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n} \pmod{7} \equiv a_n \pmod{7},$$

$$\text{d'où } a_{n+1} = a_n^2 - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) \equiv a_n^2 - 2a_n \pmod{7}.$$

2. En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid a_n$.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition

$$P(n) : "7 \mid a_n".$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4^1 + 2^1 + 1 = 7$ qui est bien divisible par 7. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Comme on a $a_{n+1} \equiv a_n^2 - 2a_n \pmod{7}$ et que $7 \mid a_n$, alors $a_{n+1} \equiv 0^2 - 2 \times 0 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$, donc a_{n+1} est divisible par 7 et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 7 \mid a_n$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $273x + 49y = 5$ et $273x + 49y = 14$.

Correction. Par l'algorithme d'Euclide, on a :

$$273 = 5 \times 49 + 28$$

$$49 = 28 + 21$$

$$28 = 21 + 7$$

$$21 = 3 \times 7 + 0,$$

donc $\text{PGCD}(273, 49) = 7$. Comme 7 ne divise pas 5, l'équation $273x + 49y = 5$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Puisque $7 \mid 14$, alors l'équation $273x + 49y = 14$ admet des solutions. En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient

$$7 = 28 - 21 = 28 - (49 - 28) = 2 \times 28 - 49 = 2(273 - 5 \times 49) - 49 = 273(2) + 49(-11),$$

donc, en multipliant par 2, $(4, -22)$ est solution de l'équation $273x + 49y = 14$. En divisant 273 et 49 par leur PGCD, on obtient 39 et 7 (qui sont donc premiers entre eux), et l'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$S = \{(4 + 7k, -22 - 39k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 5 Polynômes cyclotomiques (1 + 1.5 + 0.5 + 1 = 4 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ \text{PGCD}(k,n)=1}}^n \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ le n -ième polynôme cyclotomique, où on multiplie donc tous les polynômes de la forme $X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k allant de 1 à n et tels que $\text{PGCD}(k, n) = 1$.

1. Calculer et développer Φ_1 , Φ_2 et Φ_4 .

Correction. On a

$$\begin{aligned} \bullet \Phi_1 &= \prod_{\substack{k=1 \\ \text{PGCD}(k,1)=1}}^1 \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{1}}\right) = X - e^{2i\pi} = X - 1, \text{ car } \text{PGCD}(1, 1) = 1, \\ \bullet \Phi_2 &= \prod_{\substack{k=1 \\ \text{PGCD}(k,2)=1}}^2 \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2}}\right) = X - e^{i\pi} = X + 1, \text{ car } \text{PGCD}(1, 2) = 1 \text{ et } \text{PGCD}(2, 2) = 2 \neq 1, \\ \bullet \Phi_4 &= \prod_{\substack{k=1 \\ \text{PGCD}(k,4)=1}}^4 \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{4}}\right) = \left(X - e^{i\frac{2\pi}{4}}\right) \left(X - e^{i\frac{6\pi}{4}}\right) = (X - i)(X + i) = X^2 + 1, \text{ car } \\ &\quad \text{PGCD}(1, 4) = 1, \text{ PGCD}(2, 4) = 2 \neq 1, \text{ PGCD}(3, 4) = 1 \text{ et } \text{PGCD}(4, 4) = 4 \neq 1. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler quelles sont les racines n -ièmes de 1 et montrer que l'ensemble des racines de Φ_n est $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ et } \forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z^p \neq 1\}$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n -ième de 1 sont les solutions de l'équation $z^n = 1$, donc il s'agit de l'ensemble $U_n = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

Le polynôme Φ_n étant scindé, ses racines sont $\{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{PGCD}(k, n) = 1\} \subset U_n$, donc en particulier ce sont des racines n -ième de 1 vérifiant $z^n = 1$.

Soit $z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $1 \leq k \leq n$ une racine de l'unité et soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors on a

$$z^p \neq 1 \iff e^{i\frac{2\pi kp}{n}} \neq 1 \iff \frac{kp}{n} \notin \mathbb{Z} \iff n \nmid kp \iff \text{PGCD}(k, n) = 1$$

car n et p sont premier entre eux, et $k \leq n$. On a donc montré que les racines de Φ_n sont $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ et } \forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z^p \neq 1\}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est un diviseur du polynôme $X^n - 1$.

Correction. Les racines de $X^n - 1$ sont les racines de l'unité. Comme les racines de Φ_n sont distinctes et forment une partie des racines de l'unité, on en déduit que Φ_n divise $X^n - 1$.

4. Soit p est un nombre premier. Montrer que $\Phi_p = \sum_{j=0}^{p-1} X^j$.

Correction. Si p est un nombre premier, alors $\{k : 1 \leq k \leq p, \text{PGCD}(k, p) = 1\} = \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, donc

$$\Phi_p = \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{p}}\right) = \frac{\prod_{k=1}^p \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{p}}\right)}{X - 1} = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} X^j,$$

puisque les racines de $X^p - 1$ sont exactement les racines de l'unité et que ce polynôme est scindé.