

Contrôle Terminal du 12 janvier 2025

Durée : 2 heures

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 1 + 2 = 4 points)

1. Énoncer la formule de Moivre (on ne demande pas la preuve).
2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, que peut-on dire de $\deg(P + Q)$ (on ne demande pas la preuve) ?
3. Énoncer et démontrer le Lemme de Gauss.

Exercice 2 Factorisation d'un polynôme (0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1 = 4 points)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$, où -1 est une racine de P .

1. Montrer que $\alpha = 8$.
2. Montrer que -1 est une racine double de P .
3. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de multiplicité au moins de 2 de P en utilisant le fait que j est racine du polynôme $X^2 + X + 1$.
4. En déduire une autre racine double de P et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Nombres complexes et polynômes du second degrés (2 + 1 + 1 = 4 points)

1. Déterminer les racines carrées de $\delta = -15 - 8i$.
Indication : $15^2 = 225$ et $17^2 = 289$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.
3. Soit $P = X^2 - (3 + 2i)X + 5 + 5i \in \mathbb{C}[X]$. Donner un exemple, en justifiant, de polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 qui soit premier avec P .

Exercice 4 Arithmétique (1.5 + 1 + 1.5 = 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n^2 - 2(8^{2^n} + 4^{2^n} + 2^{2^n}) = a_{n+1}$ et en déduire que $a_{n+1} \equiv a_n^2 - 2a_n \pmod{7}$.
2. En utilisant la question précédente, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid a_n$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $273x + 49y = 14$.

Exercice 5 Polynômes cyclotomiques (1 + 1.5 + 1.5 = 4 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ \text{PGCD}(k,n)=1}}^n \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)$ le n -ième polynôme cyclotomique, où on

multiplie donc tous les polynômes de la forme $X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et tels que $\text{PGCD}(k, n) = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des racines n -ièmes de 1.
2. Calculer et développer Φ_1 , Φ_2 et Φ_4 (on cherchera à obtenir des polynômes de $\mathbb{R}[X]$).
3. Soit p est un nombre premier. Montrer que $\Phi_p = \sum_{j=0}^{p-1} X^j$.