Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre d'automne 2026–2027**

L1 UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Sujet blanc du Contrôle Partiel du 02/11/26

CORRECTION et **REMARQUES**

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (4 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Donner la définition de la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

   Correction. Cette contraposée est $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

   Remarque : Attention à ne pas confondre avec la *réciproque* $Q \Rightarrow P$ qui n'a pas toujours les mêmes valeurs de vérité que $P \Rightarrow Q$. Un énoncé ou une définition du cours s'apprend par coeur, en le/la comprenant (dans son contexte). Cela demande du temps de travail régulier tout au long de l'année.

2. Soient $0 \leqslant p \leqslant n$ des entiers. Donner et démontrer la formule permettant de calculer $\sum_{k=p}^{n} k$.

   Correction. Soient $0 \leqslant p \leqslant n$ des entiers, alors, en notant $S = \sum_{k=p}^{n} k$, on a

   $$S = p + (p+1) + ... + n - 1 + n$$
   $$S = n + (n-1) + ... + (p+1) + p.$$

   Cette somme ayant $n - p + 1$ termes, cela implique, en sommant les deux expressions précédentes termes à termes, que $2S = (n+p)(n-p+1)$, et donc finalement

   $$S = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}.$$

   Remarque : Une preuve s'apprend en la refaisant plusieurs fois et en vérifiant que chaque argument est à sa place. Un bon exercice est le suivant : mettez-vous par groupe (disons 3 ou 4 personnes) et l'un.e d'entre vous présente une preuve, les autres étant là pour faire des critiques constructives sur la forme (présentation, rédaction) et le fond (calculs, arguments logiques).

Exercice 2 Sommes doubles (4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

   Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j} &= \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} 4^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}\right) \\
&= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(4^{n+1}-1)(1-2^{-n-1})}{3\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{(4^{n+1}-1)(2-2^{-n})}{3} \\
&= \frac{2\cdot 4^{n+1} - 4^{n+1}\cdot 2^{-n} - 2 + 2^{-n}}{3} \\
&= \frac{2\cdot 2^{2n+2} - 2^{2n+2}\cdot 2^{-n} - 2 + 2^{-n}}{3} \\
&= \frac{2^{2n+3} - 2^{n+2} + 2^{-n} - 2}{3}.
\end{aligned}$$

   Remarque : Attention aux signes ! De plus, si vous arrivez à la cinquième égalité, alors vous avez la majorité des points. Il est aussi important de savoir rédiger un calcul, donc vous pouvez vous référer à la fiche méthodologique correspondante.

2. Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(ij) = 2n\ln(n!)$.

   Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(ij) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\ln(i)+\ln(j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} n\ln(i) + \sum_{j=1}^{n} n\ln(j) \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \ln(i) + n\sum_{j=1}^{n} \ln(j) \\
&= n\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) + n\ln\left(\prod_{j=1}^{n} j\right) \\
&= n\ln(n!) + n\ln(n!) \\
&= 2n\ln(n!).
\end{aligned}$$

Remarque : Attention ici à bien séparer les deux sommes doubles (que l'on peut intervertir).

Exercice 3 Nombres de Fermat et récurrence (4 points)

Les *nombres de Fermat* sont définis par la relation suivante :

$$\begin{cases} F_0 = 3, F_1 = 5 \\ F_{n+1} = F_n^2 - 2\left(F_{n-1} - 1\right)^2, \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Remarque : On prend ici pour convention que, pour tous réels positifs x, y, z, on a $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$ par

$$P(n) \quad : \quad F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Initialisation : Si $n = 0$, alors $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3 = F_0$ donc $P(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, alors $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 = F_1$ donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie. En effet, on a donc

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n^2 - 2\left(F_{n-1} - 1\right)^2 \\ &= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 - 2\left(2^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= 2^{2 \cdot 2^n} + 2^{2^n+1} + 1 - 2 \cdot 2^{2 \cdot 2^{n-1}} \\ &= 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n+1} + 1 - 2^{2^n+1} \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1. \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est initialisée est héréditaire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie par le principe de récurrence double.

Remarque : Il y a évidemment plusieurs difficultés ici :

1. Il faut savoir rédiger correctement une récurrence, et une récurrence double en particulier.
2. Si vous parlez d'une propriété $P(n)$, elle doit absolument être définie au début de votre preuve.
3. Pour l'initialisation, faites attention à la première valeur de n possible (ici $n = 0$).
4. Pour l'hérédité, rappelez-vous que l'on FIXE n au départ (ici il est dans $\mathbb{N}^*$ car sinon $n - 1$ n'a pas de sens pour $n = 0$), puis qu'il faut montrer une implication.
5. Il y a des difficultés calculatoires concernant les puissances dans le calcul de F_{n+1}, à vous de bien suivre chaque étape.
6. N'oubliez pas la conclusion !

Exercice 4 Ensembles/Applications (4 points)

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 2, y \leqslant 3\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $f(A \cap B)$.

   Correction. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$(x,y) \in A \cap B \iff x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x \leqslant 2, y \leqslant 2 \iff x \in [0,2] \text{ et } y \in [0,3].$$

   Finalement $A \cap B = [0,2] \times [0,3]$.

   Maintenant, on a :

   $$z \in f(A \cap B) \iff \exists (x,y) \in A \cap B, z = f(x,y) \iff \exists (x,y) \in [0,2] \times [0,3], z = x+y \iff z \in [0,5],$$

   car, pour la dernière équivalence :

   - on a $(0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3) \Rightarrow 0 = 0+0 \leqslant x+y \leqslant 2+3 = 5$,
   - si $z \in [0,5]$, alors $z = x+0$ si $x = z \in [0,2]$, ou $z = 2+y$ avec $y = z-2 \in]0,3]$ si $z \in]2,5]$.

   En résumé, on a $f(A \cap B) = [0,5]$.

   Remarque : Pour déterminer $A \cap B$, on voit que l'on peut raisonner par équivalence (sans explication supplémentaire). Par contre, pour $f(A \cap B)$, si l'on écrit des équivalences, il faut tout de même expliquer chacune des implications.

2. A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Justifier.

   Correction. On sait déjà que $f(A \cap B) = [0,5]$. De plus, on a

   $$f(A) = \{f(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0\} = \{x+y \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_+,$$

   mais aussi

   $$f(B) = \{x+y \in \mathbb{R} : x \leqslant 2, y \leqslant 3\} =]-\infty, 5],$$

   où on utilise le même argument que pour déterminer $f(A \cap B)$.

   Finalement, on a bien $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+ \cap]-\infty, 5] = [0,5] = f(A \cap B)$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

   Correction. Comme $f(1,-1) = f(-1,1) = 0$ et que $(1,-1) \neq (-1,1)$, alors f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

   Soit $z \in \mathbb{R}$, alors on a $z = z+0 = f(z,0)$ donc z admet toujours un antécédent par f dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que f est surjective.

   Remarque : Si les méthodes ne sont pas claires, veuillez vous référer à la fiche méthodologique correspondante.

Exercice 5 Logique et quantificateurs (4 points)

On considère la proposition suivante :

$$P : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < \delta \Longrightarrow |x^2| < \varepsilon.$$

1. Déterminer non(P).

   Correction. On a non(P) : $\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad |x| < \delta$ et $|x^2| > \varepsilon$.

   Remarque : Pour la négation des parties avec quantificateur, il n'y a pas de problème. Par contre, on voit qu'il y a une implication $A \Rightarrow B$ dans la proposition P et on sait que non$(A \Rightarrow B)$ est équivalent à (A et non(B)), d'où la dernière partie de la proposition non(P).

2. La proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

   Correction. La proposition P est vraie. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors pour $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x|^2 = |x^2| < \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon.$$

   Remarque : Pour montrer une proposition commençant par "$\forall \varepsilon > 0$", on commence la preuve par "soit $\varepsilon > 0$". Ensuite, pour montrer que δ existe, soit on a un résultat mathématique qui l'atteste, soit on écrit explicitement ce qu'est δ.

3. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |x| < \delta \Longrightarrow |x^2| < \varepsilon)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

   Correction. Cette proposition est vraie. Comme on sait déjà que le δ associé au ε ne dépend pas d'un x choisi, il est clair que de fixer x au départ ne change rien. Plus précisément : soit $x \in \mathbb{R}$, soir $\varepsilon > 0$, alors pour $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, on a (encore une fois)

   $$|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x|^2 = |x^2| < \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon.$$

   Remarque : Cet exercice n'est pas difficile, mais demande à comprendre la signification des quantificateurs et de leur ordre dans une proposition, et c'est cela qui peut vous déstabiliser.