
Sujet blanc du Contrôle Partiel du 02/11/26Durée : 1h30

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (4 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Donner la définition de la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.
2. Soient $0 \leq p \leq n$ des entiers. Donner et démontrer la formule permettant de calculer $\sum_{k=p}^n k$.

Exercice 2 Sommes doubles (4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{2i-j}$.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ln(ij) = 2n \ln(n!)$.

Exercice 3 Nombres de Fermat et récurrence (4 points)

Les *nombres de Fermat* sont définis par la relation suivante :

$$\begin{cases} F_0 = 3, F_1 = 5 \\ F_{n+1} = F_n^2 - 2(F_{n-1} - 1)^2, \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Remarque : On prend ici pour convention que, pour tous réels positifs x, y, z , on a $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.

Exercice 4 Ensembles/Applications (4 points)

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, y \leq 3\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $f(A \cap B)$.
2. A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Justifier.
3. L'application f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier.

Exercice 5 Logique et quantificateurs (4 points)

On considère la proposition suivante :

$$P : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < \delta \implies |x^2| < \varepsilon.$$

1. Déterminer $\text{non}(P)$.
2. La proposition P est-elle vraie ou fausse? Justifier.
3. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |x| < \delta \implies |x^2| < \varepsilon)$ est-elle vraie ou fausse? Justifier.