Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre d'automne 2026–2027**

L1 UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Contrôle Partiel du Lundi 2 Novembre 2026

Durée : 1h30

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Donner une conjonction équivalente à $\text{non}(P \Longrightarrow Q)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments ? Démontrer ce résultat.

Exercice 2 Sommes (1.5 + 2.5 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (i+j) \right) = n(n+1)^2$.

Exercice 3 Raisonnements (2 + 2 = 4 points)

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow (xy + 1 \neq x + y)$.

Exercice 4 Ensembles et Applications (1 + 1.5 + 1.5 = 4 points)

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

1. Déterminer $A \cap B$ et en déduire $f(A \cap B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
   Indication : pour tout $(x, y) \in A$, montrer que $f(x, y) = 2x - 1$, puis faire de même avec $(x, y) \in B$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

Exercice 5 Ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ (2 + 2 = 4 points)

On dit qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un *ouvert* de $\mathbb{R}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$P : \quad \forall x \in \Omega, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \Omega.$$

1. Montrer que $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\text{non}(P)$ et en déduire que $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.