Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre d'automne 2026–2027**

L1 UE : Algèbre 1 pour les Mathématiques

Contrôle Partiel du Lundi 2 Novembre 2026

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (1 + 3 = 4 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Donner une conjonction équivalente à non$(P \Longrightarrow Q)$.

   Correction. Cette conjonction est "P et non(Q)".

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments ? Démontrer ce résultat .**Correction.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble à n éléments. Alors celui-ci admet 2^n parties. En effet, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, E contient $\binom{n}{k}$ parties ayant k éléments. Le nombre total de parties est donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Exercice 2 Sommes (1.5 + 2.5 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k}$.

   Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k} = 7^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{7}\right)^k = 7^n \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} = 7^n \frac{7^{n+1} - 2^{n+1}}{7^{n+1} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{7^{n+1} - 2^{n+1}}{5}.$$

   Alternativement, on remarque que $7^{n+1} - 2^{n+1} = (7-2)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k} = 5 \sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k}$*, et on retrouve le même résultat.*

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (i+j) \right) = n(n+1)^2$.

   Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors, en utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (i+j) \right) &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= (n+1) \sum_{i=0}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^{n} 1 \\
&= (n+1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} \\
&= n(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Raisonnements (2 + 2 = 4 points)

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$.
   Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $P(n) : n! \geq 2^{n-1}$.
   Initialisation : pour $n = 1$, on a $n! = 1$ et $2^{n-1} = 2^0 = 1$ donc on a bien $1! \geq 2^{1-1}$ et donc $P(1)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. En effet, on a, puisque $n + 1 \geq 2$,
   $$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$
   donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \neq 1$ et $y \neq 1) \implies (xy + 1 \neq x + y)$.
   Correction. Montrons la contraposée de cette implication. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a
   $$xy+1 = x+y \implies xy-x-y+1 = 0 \implies x(y-1)-(y-1) = 0 \implies (x-1)(y-1) = 0 \implies x = 1 \text{ ou } y = 1.$$
   Comme non$(xy + 1 \neq x + y)$ équivaut à $(xy + 1 = x + y)$, mais aussi que non$(x \neq 1$ et $y \neq 1)$ équivaut à $(x = 1$ ou $y = 1)$, on a donc bien démontré la contraposée de l'implication, donc l'implication elle-même.

Exercice 4 Ensembles et Applications (1 + 1.5 + 1.5 = 4 points)

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

1. Déterminer $A \cap B$ et en déduire $f(A \cap B)$.
   Correction. Soit $(x, y) \in A \cap B$, alors on a $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.
   Comme $x = 1 - y$, alors $1 = x - y = 1 - y - y = 1 - 2y$, ce qui donne $0 = -2y$ et donc $y = 0$.
   Ainsi $1 = x - 0$ donc $x = 1$ et on a trouvé que $A \cap B = \{(1, 0)\}$.
   Comme $f(1, 0) = 1^2 - 0^2 = 1$, on a donc $f(A \cap B) = \{1\}$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
   Indication : pour tout $(x, y) \in A$, montrer que $f(x, y) = 2x-1$, puis faire de même avec $(x, y) \in B$.
   Correction. On sait déjà que $f(A \cap B) = \{1\}$. Soit $(x, y) \in A$, alors $y = 1 - x$ et donc $f(x, y) = x^2 - (1 - x)^2 = x^2 - (1 - 2x + x^2) = 2x - 1$.
   De même, soit $(x, y) \in B$, alors $y = x-1$ et donc $f(x, y) = x^2-(x-1)^2 = x^2-(x^2-2x+1) = 2x-1$.
   On a donc, en prenant $x = 2$, et comme $2 \times 2 - 1 = 3$, que $3 \in f(A) \cap f(B)$ et donc que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
   Correction. Comme $f(1, 1) = f(-1, -1) = 0$, on en déduit que f n'est pas injective, donc qu'elle n'est pas bijective.
   Soit $z \in \mathbb{R}$, alors :
   - si $z \geq 0$, alors $z = \sqrt{z}^2 - 0^2 = f(\sqrt{z}, 0)$.
   - si $z < 0$, alors $z = -(-z)$ avec $-z > 0$ et donc $z = 0^2 - \sqrt{-z}^2 = f(0, \sqrt{-z})$.

   On en déduit donc que f est surjective.

Exercice 5 **Ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ ($2+2=4$ points)**

On dit qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un *ouvert* de $\mathbb{R}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$P : \quad \forall x \in \Omega, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Omega.$$

1. Montrer que $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Correction. Soit $x \in]0,1[$, alors pour $\varepsilon = \min\left(\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$, on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]0,1[$. En effet :

   - Si $\frac{x}{2} \leqslant \frac{1-x}{2}$, alors $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = \frac{x}{2}$, donc

   $$x - \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0 \quad \text{et} \quad x + \varepsilon = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} \leqslant \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} < 1,$$

   d'où $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]0,1[$.

   - Si $\frac{1-x}{2} < \frac{x}{2}$, alors $\frac{1}{2} < x < 1$ et $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$, donc

   $$x - \varepsilon = x - \frac{1-x}{2} = \frac{3x-1}{2} > \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 1}{2} = \frac{1}{4} > 0 \quad \text{et} \quad x + \varepsilon = x + \frac{1-x}{2} = \frac{x+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$

   d'où $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]0,1[$.

   et donc $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\text{non}(P)$ et en déduire que $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Correction. On a

   $$\text{non}(P) : \quad \exists x \in \Omega, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset \Omega$$

   On a $0 \in [0,1[$ et il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset [0,1[$ car $]-\varepsilon, 0[\not\subset [0,1[$. Ainsi, $[0,1[$ vérifie bien $\text{non}(P)$ et donc $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.