# Compléments de cours sur les Applications

Laurent Bétermin

30 octobre 2026

**Exemple 3.20-3.21-3.22.** On peut considérer $f : \{0,1,2\} \to \{a,b,c\}$ tel que $f(0) = a$ et $f(1) = f(2) = c$.

- L'ensemble de départ de $f$ est $\{0,1,2\}$ et son ensemble d'arrivée est $\{a,b,c\}$.
- Ici, on n'a pas de formule permettant de déterminer les images des éléments de l'ensemble de départ, mais juste la "règle" : 0 est envoyé sur $a$, 1 est envoyé sur $c$ et 2 est envoyé sur $c$.
- Dit autrement (et mieux!) : 0 est l'antécédent de $a$, $a$ est l'image de 0, 1 et 2 sont les antécédents de $c$, et $c$ est l'image de 1 et de 2.
- On remarque que $b$ n'a pas d'antécédent, ce qui est possible car les ensembles d'arrivée et de départ sont des choix.
- On a $f(\{0,1,2\}) = \{a,c\}$, $f(\{0\}) = \{a\}$, $f(\{1,2\}) = \{c\}$ (ce sont des ensembles qui donnent toutes les images).
- On a $f^{-1}(\{a\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{c\}) = \{1,2\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ (ce sont des ensembles qui donnent tous les antécédents).
- On pourrait définir la restriction $f_{|\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{a,b,c\}$, telle que $f(1) = f(2) = c$ (l'application devient constante). On pourrait aussi prolonger $f$ en $g : \{0,1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ avec $g(3) = b$ et $g_{|\{0,1,2\}} = f$.
  Ainsi, $g$ est donc défini par $f$ sur l'ensemble $\{0,1,2\}$ et défini autrement sur $\{3\}$.

**Preuve de la Proposition 3.24.** Admise (c'est un bon exercice classique à essayer de faire).

**Remarques sur l'injectivité/surjectivité/bijectivité.** On donne ici tous les cas possibles concernant ces notions. En "mots" :

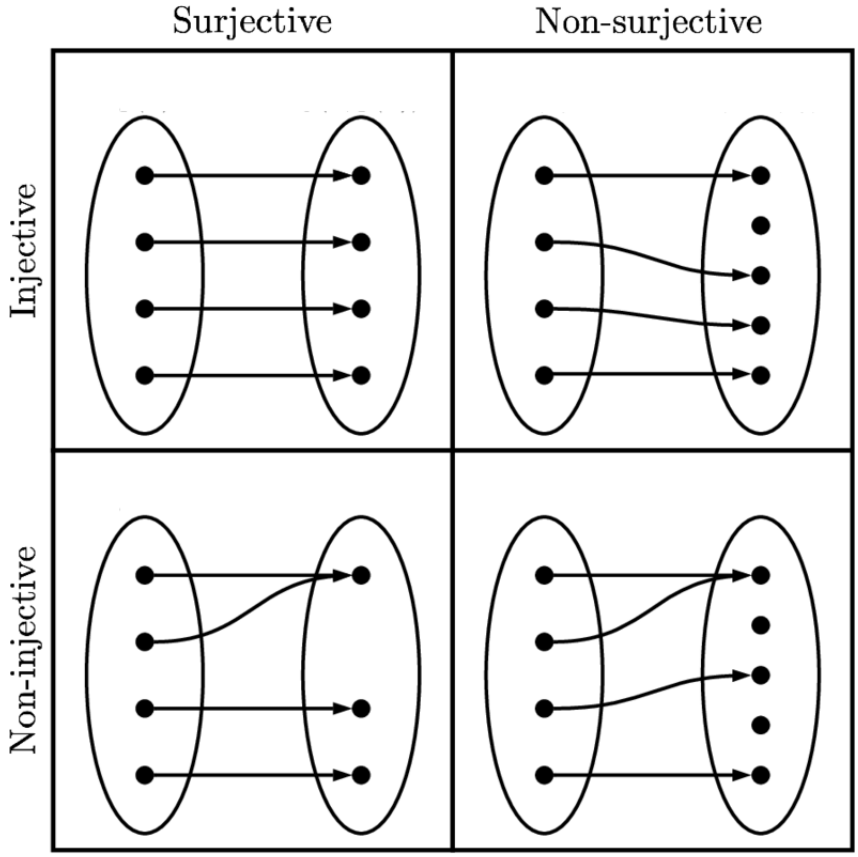
1. $f$ injective : chaque élément de l'espace d'arrivée admet un ou aucun antécédent. Deux flèches ne peuvent aller sur le même élément de l'espace d'arrivée, et certains éléments ne sont pas "touchés" par une flèche.
2. $f$ non-injective : un élément de l'espace d'arrivée à au moins deux antécédents distincts. Deux flèches atteignent un même élément de l'espace d'arrivée.

3. $f$ surjective : tout élément de l'espace d'arrivée à au moins un antécédent. Les flèches atteignent tous les éléments de l'espace d'arrivée. On est sûr (pour SURjective) que tout élément admet un antécédent (ou plus).

4. $f$ non-surjective : certains éléments de l'espace d'arrivée n'ont aucun antécédent.

5. $f$ bijective : $f$ est à la fois injective et surjective. Les éléments sont tous liés un à un.
   Dans ce cas, une bijection réciproque existe (on peut renverser le sens des flèches !), notée $f^{-1}$.
   **Attention danger :** ne pas confondre l'ensemble $f^{-1}(B)$, quand $B \subset F$ est un ensemble, qui existe toujours (c'est l'ensemble des antécédents de $B$ par $f$, et ça peut être l'ensemble vide) et $f^{-1}(y)$ avec $y \in F$ qui est l'image réciproque de $y$ et qui n'existe QUE quand $f$ est bijective (sinon on ne peut pas parler de "réciproque"). En gros, on ne peut pas mettre un élément de $F$ (un réel par exemple) dans $f^{-1}$ si $f$ n'est pas bijective.
   Exemple : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x) = x^2$, alors $f$ est bijective de bijection réciproque donnée par $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, et $f^{-1}(4) = 2$, ou bien $f^{-1}(0) = 0$. On a aussi $f^{-1}([0,4]) = [0,2]$.
   Par contre, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$, alors $f$ n'est pas bijective, donc $f^{-1}(1)$ n'a aucun sens. Par contre, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$ (faites un dessin).

6. $f$ non-bijective : $f$ n'est pas injective ou $f$ n'est pas surjective.



**Preuve de la Proposition 3.33.** C'est évident. Si on prend $x \in E$ et qu'on lui applique $f$, on trouve un élément $f(x)$ qui n'est atteint que pour ce $x$ particulier. Ainsi, en appliquant l'application réciproque $f^{-1}$ à $f(x)$, on retrouve $x$. On a donc $x \mapsto f(x) \mapsto f^{-1}(f(x)) = x$, cette application est bien l'identité sur $E$ notée $\mathrm{Id}_E$. Même chose en commençant par $f^{-1}$ pour la deuxième égalité.

**Preuve de la Proposition 3.34.** Soit $y \in G$ et $x \in E$, alors on a, puisque $g$ est bijective,

$$y = (g \circ f)(x) \iff g^{-1}(y) = g^{-1}\big(g \circ f(x)\big) = \mathrm{Id}_F \circ f(x) = f(x).$$

Puis, comme $f$ est aussi bijective, on obtient

$$y = (g \circ f)(x) \iff g^{-1}(y) = f(x) \iff f^{-1}\big(g^{-1}(y)\big) = f^{-1}(f(x)) = \mathrm{Id}_E(x) = x.$$

On a donc montré que $f^{-1} \circ g^{-1}(y) = x$. Ainsi, $g \circ f$ est bijective de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.