

Identités remarquables

Première partie du CM du 18 septembre.

Algèbre 1
18/09/2026



Lyon 1

Proposition 1.11 - Différence de puissances

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

(Formule vue/appliquée en TD lundi 14 septembre.)

Preuve de la Proposition 1.11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

Preuve de la Proposition 1.11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b) a^{n-1-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{n-k} b^k - a^{n-1-k} b^{k+1} \right) \\&= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})\end{aligned}$$

avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a^{n-k} b^k$.

Preuve de la Proposition 1.11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b) a^{n-1-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{n-k} b^k - a^{n-1-k} b^{k+1} \right) \\&= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})\end{aligned}$$

avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a^{n-k} b^k$. D'après le principe de télescopage, on obtient donc

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = u_0 - u_{n-1+1} = u_0 - u_n = a^n - b^n.$$

Exemples 1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- $$a^2 - b^2 = (a - b) \sum_{k=0}^{2-1} a^{2-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = (a - b)(a + b)$$

Exemples 1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- $a^2 - b^2 = (a - b) \sum_{k=0}^{2-1} a^{2-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} b^k = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemples 1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- $a^2 - b^2 = (a - b) \sum_{k=0}^{2-1} a^{2-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} b^k = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a + b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} (-b)^k = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemples 1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- $a^2 - b^2 = (a - b) \sum_{k=0}^{2-1} a^{2-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} b^k = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a + b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} (-b)^k = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^5 - b^5 = (a - b) \sum_{k=0}^4 a^{4-k} b^k = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$

Exemples 1.11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- $a^2 - b^2 = (a - b) \sum_{k=0}^{2-1} a^{2-1-k} b^k = (a - b) \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} b^k = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a + b) \sum_{k=0}^2 a^{2-k} (-b)^k = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^5 - b^5 = (a - b) \sum_{k=0}^4 a^{4-k} b^k = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$
- $a^5 + b^5 = a^5 - (-b)^5 = (a + b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)$

Proposition 1.12 et sa preuve

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels, alors

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right)^2 = \sum_{i \in I} a_i^2 + \sum_{i, j \in I} a_i a_j = \sum_{i \in I} a_i^2 + 2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in I}} a_i a_j.$$

Proposition 1.12 et sa preuve

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels, alors

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right)^2 = \sum_{i \in I} a_i^2 + \sum_{\substack{i, j \in I \\ i < j}} 2 a_i a_j = \sum_{i \in I} a_i^2 + 2 \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in I}} a_i a_j.$$

Preuve. On note $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, alors

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right)^2 = (a_{i_1} + \dots + a_{i_n})(a_{i_1} + \dots + a_{i_n}).$$

En développant on obtient bien tous les carrés et tous les produits possibles de type $a_{i_p} a_{i_m}$ et $a_{i_m} a_{i_p}$ (qui sont égaux !).

En regroupant ces produits, on peut simplement les compter deux fois.

Définition 1.13 - Factorielle et coefficient binomial

On définit les quantités suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et on prend pour convention que $0! = 1$. Le nombre $n!$ avec $n \in \mathbb{N}$ est appelé **factorielle n** .

Définition 1.13 - Factorielle et coefficient binomial

On définit les quantités suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et on prend pour convention que $0! = 1$. Le nombre $n!$ avec $n \in \mathbb{N}$ est appelé **factorielle n** .
- Pour tout entiers naturels n et k tels que $k \leq n$, le **coefficient binomial** est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour les autres valeurs de n et k , on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Remarque 1.13 - La factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!$ est :

le nombre de façons d'ordonner un ensemble à n éléments.

- pour choisir le 1er, on a n possibilités,
- pour choisir le 2ème, on a $n - 1$ possibilités,
- etc...
- pour choisir l'avant-dernier, on n'a plus que 2 possibilités,
- pour choisir le dernier, on n'a qu'une seule possibilité.

Au final, on a $n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ manières de choisir.

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre **de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.**
Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre
de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

- pour le premier élément, on a n choix,

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre

de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

- pour le premier élément, on a n choix,
- pour le deuxième élément, on a $n - 1$ choix, etc.

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre

de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

- pour le premier élément, on a n choix,
- pour le deuxième élément, on a $n - 1$ choix, etc.
- pour le k -ième élément, on a $n - k + 1$ choix.

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre

de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

- pour le premier élément, on a n choix,
- pour le deuxième élément, on a $n - 1$ choix, etc.
- pour le k -ième élément, on a $n - k + 1$ choix.

Au total, on a donc $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$ possibilités dont $k!$ possibilités sont identiques sans ordonner. On obtient donc

Remarque 1.13 - Le coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre

de parties non-ordonnées à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Soit E ayant n éléments. Pour une partie à k éléments :

- pour le premier élément, on a n choix,
- pour le deuxième élément, on a $n - 1$ choix, etc.
- pour le k -ième élément, on a $n - k + 1$ choix.

Au total, on a donc $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$ possibilités dont $k!$ possibilités sont identiques sans ordonner. On obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) \times \cancel{(n - k) \times (n - k - 1) \times \dots \times 2 \times 1}}{\cancel{(n - k) \times (n - k - 1) \times \dots \times 2 \times 1} \times k!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!k!} = \binom{n}{k} \text{ possibilités non-ordonnées.} \end{aligned}$$

Lemme 1.14 : Formule de Pascal et symétrie

Pour tous entiers naturels n et k , non simultanément nuls, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

De plus, pour tous entiers naturels $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Preuve du Lemme 1.14 (à essayer de refaire seul.e)

Soient n et k deux entiers naturels non simultanément nuls, alors :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} \\&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \times \frac{n-k+k}{k(n-k)} \\&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \times \frac{n}{k(n-k)} \\&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Suite de la preuve du Lemme 1.14

Si $n \geq k$, alors

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Proposition 1.15 : Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve de la Proposition 1.15 par récurrence sur n

Preuve technique à essayer de refaire seule !

La rédaction est importante (cf. fiche méthodologique) !

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n \quad : \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, alors $(a + b)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1,$$

donc P_0 est vraie.

Preuve de la Proposition 1.15 par récurrence sur n

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

On a, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

On pose $j = k + 1$ dans la deuxième somme, d'où

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j.$$

Preuve de la Proposition 1.15 par récurrence sur n

$$(a + b)^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j \quad (\text{car } \binom{n}{0} = 1)$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + \underbrace{\binom{n}{n+1-1}}_{=\binom{n}{n}=1} b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad (\text{Formule de Pascal})$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad (\text{car } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1).$$

Preuve de la Proposition 1.15 par récurrence sur n

On a donc

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

donc P_{n+1} est vraie.

$$(Rappel : P_n : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k)$$

Conclusion. La propriété est initialisée et héréditaire, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exemples 1.15 - Binôme de Newton

Le triangle de Pascal

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Pour construire le triangle, on utilise $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

- $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a - b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$
- $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.

Nombres de parties d'un ensemble à n éléments

Si E est un ensemble à n éléments, il contient :

- $\binom{n}{0} = 1$ partie à zéro élément (l'ensemble vide)
- $\binom{n}{1} = n$ parties à 1 élément, etc.
- $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de manière générale, etc.
- $\binom{n}{n} = 1$ partie à n éléments (l'ensemble E).

Ainsi, E contient exactement

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$$

d'après la formule du binôme de Newton (pour $a = 1$ et $b = 1$).