

Feuille 7 : Nombres Complexes - Calculs de base

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes, produits, quotients et conjugués dans $\mathbb{C}$

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} a) z = 4 + 5i, & b) z = (-2 + 2i) + (5 + 3i), & c) z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i), \\ d) z = \frac{3}{i}, & e) z = \frac{4 - 3i}{5 + 2i}, & f) z = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}, \\ g) z = \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 6i. \end{array}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$:

$$a) \bar{z} + 2z, \quad b) iz^2 - 3\bar{z}.$$

Exercice 2 – Module d'un nombre complexe : calculs et propriétés

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$a) z = 2 + 5i, \quad b) z = -3 + 2i, \quad c) z = (3 - 2i)(9 + i), \quad d) z = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}.$$

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

$$a) z\bar{z}, \quad b) 2z^2, \quad c) \frac{2}{\bar{z}}, \quad d) 3\frac{\bar{z}^2}{z}.$$

Exercice 3 – Module, arguments et formes exponentielle/trigonométrique

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis en donner les formes trigonométriques et exponentielles :

$$a) u = -3, \quad b) v = 1 - i, \quad c) w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \quad d) z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. En déduire le module, un argument et les formes trigonométriques et exponentielles de uw et $\frac{z}{v}$.

Exercice 4 – Autour de l'exponentielle complexe

1. Soient $(a, b) \in]0, \pi]^2$. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$a) u = 1 + e^{ia}, \quad b) v = 1 - e^{ia}, \quad c) w = e^{ia} + e^{ib}.$$

Indication : Pour a) et b), factoriser par $e^{i\frac{a}{2}}$ et s'inspirer de cette idée pour c).

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le n -ième noyau de Dirichlet défini par $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

Exercice 5 – Utilisation des complexes en trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Développer $(e^{ix})^3$ et en déduire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- En utilisant la formule d'Euler, linéariser $\sin^4(x)$ (c'est-à-dire l'écrire comme une somme de $\cos(ax)$ et $\sin(bx)$ avec des a et b entiers).

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Partie réelle/imaginaire d'un complexes avec paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_m = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}$.

Exercice 7 – Récurrence et nombres complexes

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en notant $i \in \mathbb{C}$ le nombre tel que $i^2 = -1$,

$$\sum_{k=1}^n ki^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}.$$

Indication : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser le fait que $i^{n+2} = \alpha i^n$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$ à déterminer.

Exercice 8 – Forme exponentielle

Soient $(a, b) \in]0, \pi[^2$. Ecrire sous forme exponentielle le nombre $z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

Exercice 9 – Sommes d'exponentielles complexes

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le n -ième noyau de Fejér défini par $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$ où D_k est le noyau de Dirichlet donné dans l'Exercice 4.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 10 – Sommes, produits et quotients de nombres complexes

1. Soit $f : z \mapsto \frac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-3, 0\}$. Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$.
2. Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4 .

Exercice 11 – Modules et arguments (faciles)

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a) u = -1, \quad b) v = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c) w = -3e^{-i\pi}, \quad d) z = \frac{2}{i}.$$

Exercice 12 – Modules et arguments (un peu plus difficile)

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a) u = \sqrt{3} + 3i, \quad b) v = \frac{\sqrt{2}}{1-i}, \quad c) w = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}, \quad d) z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Exercice 13 – Utilisation des complexes en trigonométrie

1. Calculer $\cos^2(x) \sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.