

Feuille 6 : Applications

A. Exercices standards

Exercice 1 – Applications et quantificateurs

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

- 1) f s'annule
- 2) f est l'application nulle
- 3) f n'est pas une application constante
- 4) f ne prend jamais deux fois la même valeur
- 5) f s'annule au plus une fois

Exercice 2 – Exemples d'images directes et réciproques d'ensembles

1. Soit $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ définie par : $f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$.
 - (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
 - (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 3 – Images directes/réciproques et cercles

1. Soit C le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{2x^2 + 4y^2}{4 + y^2}$. Déterminer $f(C)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ et $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 - 2v = 1\}$. Déterminer $g^{-1}(B)$.
3. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(\frac{1-y}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2} \right)$ et $P = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ une parabole.
Montrer que $h(P)$ est inclus dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et déterminer $h^{-1}(\{(1, 0)\})$.
Remarque : en fait $h(P)$ est exactement le cercle unité.

Exercice 4 – Injectivité, surjectivité et bijectivité Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Si l'une d'elle est bijective, déterminer sa bijection réciproque.

- 1) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- 2) $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$
- 3) $f : \{2, 3\} \rightarrow \{1\}, x \mapsto 1$
- 4) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
- 5) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2 - 1$
- 6) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \mapsto (s + t, s - t)$
- 7) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto mn$
- 8) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2, k \mapsto (k, (k + 1)^2)$

Exercice 5 – Composition et injectivité, bijectivité, surjectivité

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

- (a) $g \circ f = \text{id}_E$;
- (b) $f \circ g = \text{id}_F$;
- (c) $f \circ f = \text{id}_E$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

On suppose connu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels (m, j) avec $0 \leq j \leq m$ tel que

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + j.$$

On définit alors $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (m - j, j)$.

1. Placer les points $f(k)$ pour $0 \leq k \leq 9$.
2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 7 – Images directes et réciproques d'ensembles (plus abstrait)

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

1. Soient $I, J \in \mathcal{P}(F)$, montrer que $I \subset J \Rightarrow f^{-1}(I) \subset f^{-1}(J)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que pour toute partie I de F , $f(f^{-1}(I)) \subset I$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E , on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) = B$.
5. On suppose maintenant que $E = F$ et $f(f(E)) = E$. Montrer que f est surjective.

Exercice 8 – Application sur $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Indication : pour une des implications, on pourra calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Exemples d'images directes et réciproques

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp([-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{[0, \pi]})^{-1}([0, 1])$;
11. $(\cos_{[3\pi, 7\pi]})^{-1}([0, 1])$;
12. $\cos^{-1}([0, 1])$;

Exercice 10 – Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Si l'une d'elle est bijective, déterminer sa bijection réciproque.

- 1) $f : \{1\} \longrightarrow \{1/2\}$
 $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(s, t) \mapsto (3s + t, s - 2t)$
- 3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto -\sin(x)$

Exercice 11 – Composition

1. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?