

Feuille 5 : Types de raisonnements

A. Exercices standards

Exercice 1 – Raisonnements par récurrence

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 3^n$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers naturels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. Établir la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 3^n.$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Exercice 2 – Raisonnement par récurrence forte

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence forte que l'on a $u_n = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 – Irrationalité de $\sqrt{2}$

Le but de cet exercice est de démontrer, par l'absurde, que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. Vérifier que l'on a $p^2 = 2q^2$.
2. Justifier que l'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
3. Démontrer que p est pair.
4. En déduire que q est pair.
5. En déduire que p et q n'existent pas.

Exercice 4 – Démontrer qu'une inégalité est fausse Démontrer que la proposition suivante est fausse

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad 2^{3^x} (\ln(1-x) + 1)(3x^3 + xe^x - 4) \geq 0.$$

Exercice 5 – Raisonnement par contraposée

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la proposition suivante :

$P(n)$: " si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair. "

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer la contraposée de $P(n)$.
2. Montrer que tout entier impair n s'écrit $n = 4k + r$ où $r \in \{1, 3\}$ et $k \in \mathbb{N}$.
(Indication : écrire $n = 2p + 1$ puis faire deux cas en fonction de la parité de p .)
3. Soit $n \geq 2$. Prouver la contraposée de la proposition $P(n)$. Que peut-on en déduire ?

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Différents types de raisonnements

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).
3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?
6. (Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 7 – Disjonction de cas et raisonnement non-constructif

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$. Pour cela, on raisonne par disjonction de cas.

1. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, déterminer des irrationnels a et b tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.
2. Même question si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Conclure.

Exercice 8 – Somme d'irrationnels

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante :

P : "si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels".

1. Quelle est la contraposée de cette P ? Démontrer P .
2. Énoncer la réciproque de P . Est-ce que cette réciproque est toujours vraie ?

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Raisonnement par récurrence

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 3$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$

Exercice 10 – Récurrence et initialisation

Pour tout nombre entier naturel n , on définit la propriété $P(n)$: " $2^n > n^2$ ".

1. Démontrer que, pour $n \geq 3$, l'implication $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie.
2. Pour quels entiers n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ?

Exercice 11 – Raisonnements par l'absurde

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 12 – Raisonnements par contraposée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère la proposition suivante :

P : "si $\sum_{i=1}^n a_i \geq M$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_i \geq \frac{M}{n}$ ".

1. Énoncer la contraposée de P .
2. Démontrer P .