

## Feuille 3 : Ensembles

### A. Exercices standards

#### Exercice 1 – Vocabulaire et parties de $\mathbb{R}$

On note

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : n^2 \leq 10\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3\}, \quad C = [1, 3], \quad D = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \in [4, 14]\}$$

$$E = ]-\infty, 3], \quad F = ]-2, 7], \quad G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -6 \text{ et } x^2 + 12x + 35 > 0\}.$$

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.
 

|                             |                               |                           |                           |
|-----------------------------|-------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $1 \in A$                | b) $B \not\subset \mathbb{Z}$ | c) $\{2\} \in C$          | d) $D \subset \mathbb{N}$ |
| e) $B \subset \mathbb{Q}^*$ | f) $F \in G$                  | g) $E \subset \mathbb{R}$ | h) $\sqrt{\pi} \in F$     |
2. Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $C \cap D$ ,  $C \cup D$ ,  $E \cap F$ ,  $E \cup F$ ,  $F \cap G$ ,  $\mathbb{R} \setminus E$ ,  $B^c$ ,  $C \setminus B$ .
3. Déterminer  $A \times B$ ,  $C \times D$  et  $A \times F$ , et les représenter.

#### Exercice 2 – Inclusions d'ensembles

Montrer sur un dessin (pour 1. et 2.), puis à l'aide d'une preuve, les assertions suivantes :

1.  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ ou } x \geq -1\} \not\subset [-2, 2]$  ;
2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \text{ et } x \geq 0\} \subset (\mathbb{R}_+)^2$  ;
3.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in \mathbb{R}, x = 2t \text{ et } y = t^2 + 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ .
4.  $\{(t^3 - 3t^2, 3t - 1) : t \in \mathbb{R}, t \geq 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$ .
5.  $\forall (a, b) \in ]0, +\infty[^2, \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \subset [-a, a] \times [-b, b]$ .

#### Exercice 3 – Inclusions, égalités, intersections et unions d'ensembles

On considère les ensembles  $E$ ,  $F$  et  $G$  définis par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - xy - y^2 = 0\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}.$$

1. Montrer que  $F \subset E$  et  $G \subset E$ .
2. Montrer que  $F \cup G = E$  et tracer  $E$ .
3. Déterminer  $F \cap G$  graphiquement et par un calcul.

#### Exercice 4 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1.  $A \subset B \iff A \cup B = B$  ;
2.  $A = B \iff A \cap B = A \cup B$  ;
3.  $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$ .

#### Exercice 5 – Parties d'un ensemble

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

1. Si  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ , déterminer  $\mathcal{P}(E)$ .
2. Les ensembles  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cap F)$  sont-ils égaux ?
3. Même questions pour les ensembles  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cup F)$ .

---

## B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

### Exercice 6 – L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas

On se propose ici de montrer qu'il n'existe aucun ensemble  $E$  tel que  $\mathcal{P}(E) \subset E$ . Par l'absurde, on suppose qu'un tel ensemble existe.

1. Expliquer en quoi consiste alors l'ensemble  $A = \{x \in E : x \notin x\}$ .
2. Justifier l'équivalence  $A \in A \iff A \notin A$ .
3. En déduire que  $E$  n'existe pas.
4. Montrer en quoi ce résultat assure que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

### Exercice 7 – Produit cartésien

1. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $\{A, C\} \subset \mathcal{P}(E)$  et  $\{B, D\} \subset \mathcal{P}(F)$ . Montrer que l'on a

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

2. Montrer que l'ensemble  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux ensembles.

### Exercice 8 – Différence symétrique

Soit  $E$  un ensemble. Pour tous sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $E$ , on note  $A \Delta B$  la différence symétrique de  $A$  et  $B$  l'ensemble

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Faire un diagramme de Venn pour illustrer ce que représente cet ensemble.
2. Si  $A = [0, 3]$  et  $B = [2, 3[$ , déterminer  $A \Delta B$ .
3. Soient  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Déterminer  $A \Delta A$ ,  $A \Delta \emptyset$ ,  $A \Delta E$ ,  $A \Delta A^c$ .
4. Montrer que, pour toutes parties  $A, B$  de  $E$ ,  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
5. Montrer que, pour toutes parties  $A, B$  et  $C$  de  $E$ ,  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ .

---

## C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

### Exercice 9 – Vocabulaire et intervalles

On considère les ensembles

$$E = \{-1, 2, 6\}, \quad F = [-3, 1] \quad \text{et} \quad G = ]-2, +\infty[.$$

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.  
a)  $1 \in F$                       b)  $\{0\} \in G$                       c)  $E \subset G$                       d)  $F \in \mathbb{R}$
2. Déterminer  $E \cap F$ ,  $F \cap G$ ,  $F \cup G$ ,  $G \setminus F$ ,  $G \setminus E$ ,  $\mathbb{R} \setminus G$ ,  $\mathbb{Q} \cap E$  et  $\mathbb{N} \cap E$ .
3. Déterminer  $E \times F$  et  $F \times G$ , et les représenter.

### Exercice 10 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  et  $C$  des parties de  $E$ .

1. On suppose que  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$ . Montrer que  $B \subset C$ .
2. Montrer que  $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$  et  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ .

### Exercice 11 – Parties d'un ensemble

Soit  $E = \{0, 1\}$ . Déterminer  $\mathcal{P}(E)$ ,  $E \times E$  et  $\mathcal{P}(E \times E)$ .

### Exercice 12 – Inclusion d'ensembles

1. Montrer que  $\mathbb{Z} \not\subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$ .
2. Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3x + 5 \text{ et } x \geq 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$ .
3. Montrer que  $\{(t, 6t - 9) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y\}$ .