

Feuille 2 : Sommes et produits

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes télescopiques

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$.
2. a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 2 – Manipulations de sommes

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on pourra utiliser la question précédente si nécessaire).
a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$ b) $\sum_{k=1}^n (3k+n-1)$ c) $\sum_{k=0}^n k(k+1)$ d) $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(2k-7)^2}{3}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right) = n(n+1)^2$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ln(ij) = 2n \ln(n!)$.

Exercice 3 – Sommes géométriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- a) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{2}{5^k}$
- c) $\sum_{k=0}^n 2^k 7^{n-k}$
- d) $\sum_{k=0}^n 4^{5-k}$
- e) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{2i-j}$

Exercice 4 – Binôme de Newton et coefficient binomial

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $(x+2)^5$ et $(1-x)^9$.
2. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n 2^{n-1}$.

Exercice 5 – Produits

Soit $n \geq 2$ un entier et p et q deux entiers naturels tels que $q \geq p$. Calculer les produits suivants :

- 1) $\prod_{k=p}^q 2$
- 2) $\prod_{k=1}^n 3^k$
- 3) $\prod_{k=1}^n 5k\sqrt{k}$
- 4) $\prod_{k=-10}^{10} k$
- 5) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$
- 6) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- 7) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Sommes et produits télescopiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \qquad 2) \sum_{k=1}^n k \cdot k! \qquad 3) \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Exercice 7 – Quand on a un troisième terme

1. Expliciter deux constantes réelles a et b telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8 – Sommes doubles et maximum

1. Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $\text{Max}(i, j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée ?
2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée dans l'Exercice 2, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Simples télescopes

Soit $n \geq 4$ un entier. Calculer $3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+4)}$, $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ et $\sum_{k=3}^{n-1} (k+1)^7 - k^7$.

Exercice 10 – Sommes arithmétiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^n 7k$, $\sum_{k=1}^n (-2k+1)$ et $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{j}{k}$.

Exercice 11 – Sommes géométriques

Soit $n \geq 3$ un entier, calculer $\sum_{k=2}^{n-1} 5^k$, $2 \sum_{k=1}^n 3^k 4^{n-k}$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i 2^j$.

Exercice 12 – Binôme de Newton

Développer $(-2x+1)^5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et calculer $\sum_{k=0}^n 3^{n-k} \binom{n}{k}$ ainsi que $2^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.