

Feuille 12 : Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

A. Exercices standards

Exercice 1 – Autour de la division euclidienne

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.
2. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.
3. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

Exercice 2 – PGCD et coefficients de Bézout

Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 3 – PGCD, polynômes dérivés et racines multiples

Pour tout complexe a , on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a .
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 – Divisibilité

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $n = pq + r$ la division euclidienne de n par p .

1. Montrer que $X^p - 1$ divise $X^{pq} - 1$.
2. Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$ est $X^r - 1$.
En déduire que $X^p - 1$ divise $X^n - 1$ si et seulement si p divise n .
3. Retrouver ce résultat en utilisant la factorisation de ces polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 – Fractions rationnelles

Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.

- a) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X}{(X+1)(X-2)}.$
- b) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}.$
- c) $\frac{X^4}{X^2-3X+2}, \quad \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}.$

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Divisions euclidiennes avec un paramètre

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 7 – Divisibilité, PGCD et paramètres

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?
2. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 8 – Fractions rationnelles (plus dur)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

- a) $\frac{1}{(X^2 + 1)^2 - X^2}, \quad \frac{X^3 - 4X^2 + 1}{(X - 2)^3(X + 1)}, \quad \frac{1}{X^2(X^2 - 2X + 2)^2}.$
- b) $\frac{2X^6 + 3X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 18X - 5}{X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2}.$

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Divisions euclidiennes

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 10 – PGCD et coefficients de Bézout

Déterminer deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$ où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

Exercice 11 – Divisibilité et racine

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A = X^2 + X + 1$ et $P = X^{2n} + X^n + 1$.

1. Montrer que A divise P si et seulement si $P(j) = 0$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles A divise P .

Exercice 12 – Fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^2 + 1}{X(X^2 - 1)}, \quad \frac{X^5 - X^3 - X^2}{X^2 - 1}, \quad \frac{2}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}, \quad \frac{X^6 - X^2 + 1}{(X - 1)^3}$$