

Feuille 11 : Propriétés basiques des polynômes

A. Exercices standards

Exercice 1 – Degré et coefficients

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$
2. $P(2X + 1) = P(X)$

Exercice 2 – Polynômes dérivés, degré et coefficients

On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
 - a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ .
 - b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a .
 - c) Déterminer P .
2. Conclure.

Exercice 3 – Racines de polynômes

Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$
2. $X^6 - 4$
3. $X^4 - 13X^2 + 36$
4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 4 – Multiplicité et factorisation

Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P .

1. Déterminer α .
2. Montrer que -1 est une racine double de P .
3. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P en remarquant que j est une racine du polynôme $X^2 + X + 1$.
4. Factoriser P , d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 – Multiplicité et coefficients

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Coefficients et suite de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Exercice 7 – Polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2 \cos \theta)$.
4. Donner les racines de P_n .

Exercice 8 – Factorisations

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Après avoir factorisé $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$, en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$, de $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.
2. Factoriser le polynôme $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Identification

Soient a et b deux réels. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 10 – Degré et coefficients

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P'(X)^2 = 4P(X)$
2. $P \circ P(X) = P(X)$

Exercice 11 – Factorisation

Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 12 – Multiplicité d'une racine et factorisation

Soient a et b deux réels. On considère le polynôme $P(X) = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est racine double de P .

1. Déterminer a et b .
2. Montrer que $-1 + i$ est racine de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.