Algèbre 1 Info (MAT1074L) L1 Maths-Info 2025-2026

Léon Matar Tine [1]

Automne 2026

1. Université Claude Bernard Lyon 1

1 Chapitre 1 : Calculs algébriques

- Rappel sur l'ensemble des nombres réels
  - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
  - Intervalle de $\mathbb{R}$
  - Valeur absolue
  - Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum
- Les entiers naturels et les entiers relatifs
  - L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$
  - Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions
  - Opérations sur les fractions
- Règles sur les puissances
- Sommes et produits de familles finies de nombres réels
  - Définitions et propriétés élémentaires
- Techniques classiques de calculs algébriques
  - Sommes et produits télescopiques
  - Changement d'indice
  - Regroupement de termes
- Factorielle et coefficients binomiaux
  - Factorielle
  - Coefficients binomiaux

- Le binôme de Newton
- Sommes doubles et produit de deux sommes finies
  - Sommes doubles
  - Produit de deux sommes finies

2. Chapitre 2 : Théorie des ensembles
   - Les ensembles
     - L'ensemble vide
     - Appartenance à un ensemble
     - Les sous-ensembles (notion d'inclusion)
     - Opérations sur les ensembles
     - Produit cartésien de 2 ensembles
   - Ensemble des parties d'un ensemble (recouvrement, partition)
     - Recouvrement, partition
   - Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

3. Chapitre 3 : Les Bases de Logique
   - Origines de la logique
   - Assertions et prédicats
   - Les connecteurs logiques
   - Propriétés
   - Quantificateurs mathématiques

- Différents modes de démonstration
  - Raisonnement sous hypothèse
  - Raisonnement par l'absurde
  - Raisonnement par contre exemple
  - Raisonnement par contraposée
  - Raisonnement par récurrence

4 Chapitre 4 : Applications

- Image directe et image réciproque
- Injection
- Surjection
- Bijection
- Composition d'applications

5 Chapitre 5 : Nombres complexes

- Nombres complexes : forme algébrique
  - Lien entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$
  - Partie réelle, partie imaginaire et conjugué
  - Calculs sur les complexes

Page de l'UE MAT1074L

https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a26:s1_algebre1_info:page

Chapitre 1 : Calculs algébriques

Rappel sur l'ensemble des nombres réels

Comme abordé au Collège puis au Lycée, l'ensemble des nombres réels est représenté en mathématique par le symbole $\mathbb{R}$.
Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note "$\leq$" entre les nombres et qui est compatible avec les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.
$(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné c'est-à-dire

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Avec cette relation d'ordre, il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur $\mathbb{R}$, noté "$<$" où $x < y$ si "$x \leq y$ et $x \neq y$".
On rappelle :

$$x < y \iff y > x.$$

Intervalle de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre "$\leq$" dans $\mathbb{R}$ permet de définir les intervalles.

Definition

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme suivante :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

Les intervalles suivants $[a, b]$; $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont dit fermés.
Les intervalles $]a, b[$; $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont dits ouverts.
Les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$.
2. *Si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. *On a* $x \leq y$ *si et seulement si* $-x \geq -y$.
4. *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$.

Valeur absolue

Definition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } & x \geq 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$|-1| = 1$; $|0| = 0$; $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$.

Propriété

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$; $|x| = |-x|$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \geq 0$, $|x| \leq a$ *équivaut à* $-a \leq x \leq a$.

Valeur absolue

Théorème (Inégalités triangulaires)

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Definition (Majorant, Minorant)

Soit A une partie composée de nombres réels. On dit que A est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. On dit que M est un majorant de A
- minorée s'il existe un réel m tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$. On dit que m est un minorant de A
- bornée si A est à la fois majorée et minorée

Exemple

L'intervalle $]16, 17]$ *est majoré par 17 et minoré par 10 par exemple.*

Attention ici : 16 est un minorant ; 16 est le plus grand des minorants ; 18 est également un majorant ; 17 est le plus petit des majorants.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Remarque

- *Une partie majorée (resp. minorée) n'admet pas un unique majorant (resp. minorant). Elle en a une infinité.*
- *Les intervalles (sauf* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$*) sont des parties de* $\mathbb{R}$ *majorées ou minorées.*

Definition (Minimum, Maximum)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et m et M deux nombres réels

- si $m \in A$ et m est un minorant de A, on dit que m est le minimum de A, noté $min(A)$
- si $M \in A$ et M est un majorant de A, on dit que M est le maximum de A, noté $max(A)$.

Notion de Majorant, Minorant, Maximum, Minimum

Exemple

- *l'intervalle* $]-1,2]$ *admet* 2 *comme maximum*
- *l'intervalle* $]-1,2[$ *est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Exercices d'application :

1. Est-ce que $[-\pi,\pi]$ admet un maximum ? un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants des parties $A =]0,2[$ et $B =]-1,2]$.
3. Mettre sous forme d'intervalle les ensembles $\{x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 2\}$ et $\{x \in \mathbb{R},\ |3x-4| \leq 1\}$.
4. Mettre l'intervalle $]-7,2[$ sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels a été formalisée pour la première fois au 19ème siècle par le mathématicien italien Giuseppe Peano et le mathématiciens allemand Richard Dedekind. Cette construction dépasse le cadre de ce cours de L1 où nous nous contenterons d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$ et supposons qu'il vérifie les règles suivantes :

1. $\mathbb{N}$ est non vide.
2. $\mathbb{N}$ est totalement ordonné : pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a $i \leq j$ ou $j \leq i$.
3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : si A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors il existe a appartenant à A tel que pour tout i appartenant à A, $a \leq i$.
4. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Propriété

- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément, noté* 0*.*
- $\mathbb{N}\backslash\{0\}$*, l'ensemble des entiers naturels privé de* 0*, possède un plus petit élément, noté* 1*.*

On peut ainsi nommer les entiers successifs :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p > n\}$ possède un plus petit élément, appelé successeur de n et noté $n+1$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ possède un plus grand élément, appelé prédécesseur de n et noté $n-1$.

Ainsi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
À partir de l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, comme étant les entiers naturels et leurs opposés. Ainsi $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
En d'autres termes, un nombre est appelé entier relatif si c'est un entier naturel ou si son opposé est un entier naturel.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Remarque

Un entier naturel est donc un entier relatif. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Pour tout a, b et c dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on a :

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a * b) * c = a * (b * c)$

Il s'agit de l'associativité de l'addition et de la multiplication

- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a * 1 = 1 * a = a$

0 est l'élément neutre de l'addition et 1 celui de la multiplication.

Opération d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

- $a + b = b + a$
- $a * b = b * a$

Il s'agit de la commutativité de l'addition et de la multiplication

- $(a + b) * c = a * c + b * c$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$

Il s'agit de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$. On note cet élément a' par $-a$ (symétrie ou opposé).

Rappel sur les fractions et les opérations sur les fractions

Definition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égaux si et seulement si $ab' = a'b$.

Propriété (Simplification)

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, b et m appartenant à $\mathbb{Z}^*$ alors $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Opérations sur les fractions

- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit la somme par la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
- Pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on définit le produit par la formule $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Definition

L'ensemble des fractions, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, constitue l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ en mathématique.

Règles sur les puissances

Definition

Soient a un nombre réel non nul et m un entier strictement positif. On définit $a^m = a \times a \times a \times \cdots \times a$ pris $m-$fois

Propriété

Pour deux entiers strictement positifs m et n on a :

- $a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n-fois} = a^{m+n}$.
- $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m-fois}}_{n-fois} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{mn-fois} = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- *Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut définir a^{-m}, pour tout réel a non nul, par* $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Règles sur les puissances

Ainsi, on peut généraliser les formules précédentes dans le cas où m et n sont dans $\mathbb{Z}$.
Pour deux nombres réels a et b non nuls et $m \in \mathbb{Z}$, on a aussi $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.
Généralisation :

- Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Si $a > 0$ on définit $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- Pour a et b deux réels strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a : $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$.

Définitions et propriétés élémentaires

Definition (Symbole $\sum$ et $\prod$)

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On note :

- $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
- $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque

Par convention, si $I = \emptyset$: $\sum_{i\in I} a_i = 0$ *et* $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Cas fondamental : Si $I = [\![m, n]\!]$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $m \leq n$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Remarque

L'indice "i" ne sert qu'à compter c'est la raison pour laquelle

$$\sum_{i=1}^{n}(3i+2) = \sum_{k=1}^{n}(3k+2) = \sum_{s=1}^{n}(3s+2).$$

Définitions et propriétés élémentaires

Exemple

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{n-fois} = 28n$
2. $\sum_{k=0}^{n} 28 = \underbrace{28 + 28 + \cdots + 28}_{(n+1)-fois} = 28(n+1)$
3. *somme des n premiers naturels :*
   $$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
4. *somme des carrés des n premiers entiers :*
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (On admet)}$$
5. *somme géométrique : pour q réel et* $q \neq 1$ *on a*
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Définitions et propriétés élémentaires

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$ on a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{(1 - q^{n+1-m})}{1 - q}.$$

La preuve de ce résultat découle du raisonnement suivant : On note par $S_{m,n}$ cette somme. Ainsi on écrit d'une part

$$S_{m,n} = q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n$$
$$q \times S_{m,n} = q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^n + q^{n+1}$$

En faisant la différence des deux lignes précédentes on trouve :

$$S_{m,n} - q \times S_{m,n} = q^m - q^{n+1} \Longrightarrow S_{m,n}(1 - q) = q^m - q^{n+1}$$

$$\Longrightarrow S_{m,n} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Définitions et propriétés élémentaires

Propriété (Linéarité de la somme)

Soit I, un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres. On a :

1. $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$
2. *Pour tout réel λ,* $\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

Exemple

Soit $n \geq 5$ un entier et x, y deux réels. Nommer et calculer la somme :

- $\sum_{k=0}^{n}(3k-2x) = \sum_{k=0}^{n} 3k - \sum_{k=0}^{n} 2x = 3\sum_{k=0}^{n} k - (n+1)2x = 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)2x = \frac{(n+1)(3n-4x)}{2}$
- $\sum_{s=0}^{n^2} x(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2}(s+y) = x\sum_{s=0}^{n^2} s + x\sum_{s=0}^{n^2} y = x\sum_{s=0}^{n^2} s + (n^2+1)xy = x\frac{(n^2+1)n^2}{2} + (n^2+1)xy = \frac{x}{2}(n^2+1)(n^2+2y).$
- $\sum_{i=4}^{n-1}(2^i+3) = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + \sum_{i=4}^{n-1} 3 = \sum_{i=4}^{n-1} 2^i + 3(n-4) = 2^4\frac{1-2^{n-4}}{1-2} + 3(n-4) = \frac{2^4-2^n}{-1} + 3(n-4) = 2^n + 3n - 28$

Définitions et propriétés élémentaires

Propriété (Pour le produit)

1. *Pour tout λ réel, $\prod_{i\in I} \lambda = \lambda^n$ où n est le nombre d'élements de I.*
2. $\prod_{i\in I} a_i b_i = (\prod_{i\in I} a_i)(\prod_{i\in I} b_i)$
3. $\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n (\prod_{i\in I} a_i)$ *avec n le nombre d'éléments de I.*

Propriété (Exponentielle d'une somme)

La propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ se généralise à une famille de réels $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$: $exp(\sum_{i=1}^n a_i) = \prod_{i=1}^n exp(a_i)$.

Propriété (Logarithme d'un produit)

Pour $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(\prod_{i=1}^n b_i) = \sum_{i=1}^n \ln(b_i)$.

Sommes et produits télescopiques

Partons de la somme suivante $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$. Si on déroule cette somme on a pour différentes valeurs de k :

$k = 1$ on a $2^3 - 1^3$

$k = 2$ on a $3^3 - 2^3$

$k = 3$ on a $4^3 - 3^3$

$\ldots \quad \ldots$

$k = n - 1$ on a $n^3 - (n-1)^3$

$k = n$ on a $(n+1)^3 - n^3$.

En faisant la somme on remarque que beaucoup de termes se télescopent et on obtient $(n+1)^3 - 1^3$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$ est une somme télescopique qui vaut après simplification $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$.

Sommes et produits télescopiques

Definition

Si $(u_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ est une famille de nombres, la somme $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ est dite somme télescopique. Cette somme vaut $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_m$.

Sommes et produits télescopiques

Exemple

$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} = ?$. *En posant* $u_k = \frac{e^{2k}}{k^2}$ *alors on reconnait la somme de termes télescopiques d'où*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2(k+1)}}{(k+1)^2} - \frac{e^{2k}}{k^2} = u_{n+1} - u_1 = \frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^2} - e^2.$$

De même, partons du produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} = ?$. *Pour ce produit, en posant* $u_k = e^{k^2}$, *le produit précédent s'écrit*

$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *et ainsi par simplification on a*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e}.$$

C'est ça qu'on appelle un produit télescopique.

Sommes et produits télescopiques

Definition (Produit télescopique)

On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est télescopique si pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$.

Soit $\prod_{k=0}^{n} \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ un produit télescopique. Alors $\prod_{k=0}^{n} \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{b_{n+1}}{b_0}$.

Sommes et produits télescopiques

Exercice

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer

- $U_n := \sum_{j=3}^{n} \ln(j+1) - \ln(2j)$

  Indication : On commence par remarquer que $\ln(2j) = \ln(2) + \ln(j)$ puis on remarque une somme télescopique.

- $V_n(y) := \prod_{k=1}^{n} \frac{2y(k+1)^3}{k^3}$

  Indication : ici $2y$ ne dépend pas de k donc en le sortant du produit, le reste devient un produit télescopique.

Application des sommes télescopiques

factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}).$$

Preuve de la formule :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1}b^{n-1-k}}_{a^{k+1}b^{n-(k+1)}} - a^k b^{n-k}$$

ainsi on remarque une somme télescopique. Ce qui donne

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

Remarque

- *Pour $n = 2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$*
- *Pour $b = 1$ et $a \neq 1$, $a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$*

Changement d'indice

Soit la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$, où $a_m, \cdots, a_n$ sont des nombres. L'intervalle des indices de la somme est
$[\![m, n]\!] = \{k, k \in [\![m, n]\!]\} := \{i + 3, i \in [\![m - 3, n - 3]\!]\}$.
Ainsi on a l'égalité : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m-3}^{n-3} a_{i+3}$.

Exemple

On veut faire les changements d'indices $i = k + 2$ et $j = k - n$ à la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} \frac{e^{2k+1}}{k\sqrt{k+3}}$

- *Pour $i = k + 2$ alors $k = i - 2$ donc* $S = \sum_{i=n+2}^{2n+2} \frac{e^{2i-3}}{(i-2)\sqrt{i+1}}$
- *Pour $j = k - n$ alors $k = j + n$ donc* $S = \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{2(j+n)+1}}{(j+n)\sqrt{j+n+3}}$

Regroupement de termes

Partons de l'exemple de la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n), \quad n \geq 1.$

Ici on peut décomposer la somme en deux termes en écrivant

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n(n) \\ &= \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Regroupement de termes

Regardons également l'exemple suivant : soit $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$? ici on remarque que :

$k = 0 \quad (-1)^0 = 1 \quad ; k = 1 \quad (-1)^1 = -1 \quad ; k = 2 \quad (-1)^2 = 1$

donc le terme $(-1)^k$ fait alterner le signe de S_n. Ainsi,

$S_n = -1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 \cdots - (2n-1)^2 + (2n)^2$. En écrivant la somme

$S_n = \underbrace{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}_{\text{termes pairs}} - \underbrace{(1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2)}_{\text{termes impairs}}$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 = \underbrace{\sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p}(2p)^2}_{k=2p} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p+1}(2p+1)^2}_{k=2p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 + 4p + 1 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p - \sum_{p=0}^{n-1} 1$$

$$= 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 4n^2 - 2n^2 + 2n - n = 2n^2 + n$$

Factorielle

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle factorielle n l'entier noté $n!$ défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

Remarque

- $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $0!$ *est un produit vide, donc* $0! = 1$
- $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$

Factorielle

Exemple

- *Si on veut calculer le produit des n premiers entiers pairs :* $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n$ *?*
  Attention, ce produit ne vaut pas $(2n)!$*.*
  Écrivons le produit :

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n \\ = \; & 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times (n-1) \times 2 \times n \\ = \; & 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n) \\ = \; & 2^n \times n! \end{aligned}$$

Factorielle

Exemple

- *Pour le produit des entiers impairs entre* 1 *et* $(2n+1)$ *:*
  $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$.
  Attention, de même ici ce produit de vaut pas $(2n+1)!$.
  Écrivons le produit comme suit

$$\begin{aligned} & 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \\ = & \frac{1 \times 2 \times 3 \cdots \times (2n-1) \times 2n \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2(n-1) \times 2n} \\ = & \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \end{aligned}$$

Coefficients binomiaux

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$

c'est-à-dire "p parmi n" par $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque

- *pour* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $p \notin [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = 0$.
- $\binom{n}{0} = 1\,;\ \binom{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Coefficients binomiaux

Exemple

- $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \times 6}{1 \times 2} = 15\,;\quad \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$
- $\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

Preuve

En effet si $p \in [\![0, n]\!]$ on a

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Remarque

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1\,; \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n\,; \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tout ceci par symétrie.

Théorème

(Formule de Pascal) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

La preuve est donnée ci-dessous.

Coefficients binomiaux

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ *avec* $p \in [\![0, n]\!]$

- *Si* $p = n$ *on a* $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0 \quad$ *et* $\quad \binom{n}{n} = 1$
- *Si* $p \in [\![0, n-1]\!]$, *on écrit*

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= (n-1)!\left(\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!}\right).\end{aligned}$$

Or d'une part $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p(p-1)!} = \frac{p}{p!}$ *ainsi* $\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{p}{p!(n-p)!}$.
D'autre part, $\frac{1}{(n-p-1)!} = \frac{n-p}{(n-p)!}$ *ainsi* $\frac{1}{p!(n-p-1)!} = \frac{n-p}{p!(n-p)!}$ *d'où*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(p + (n-p)) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Coefficients binomiaux

Le corollaire (conséquence) de ce théorème est le triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

Ainsi l'élément à la ligne n et à la colonne p s'obtient en sommant celle à la ligne $n-1$ et colonne $p-1$ et celle de la ligne $n-1$ et colone p.
Dans ce tableau, la première colonne vaut 1 car $\binom{n}{0} = 1$. La diagonale du tableau vaut 1 car $\binom{n}{n} = 1$. La surdiagonale vaut 0 car $p > n$.

Remarque

La formule de Pascal permet de voir que $\binom{n}{p}$ est un entier.

Le binôme de Newton

Le binôme de Newton est une méthode pour calculer la puissance entière d'une somme. Les formules de développement connues par coeur sont
$(a+b)^0 = 1; (a+b)^1 = a+b; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
Le binôme de Newton permet de généraliser ce développement au cas $(a+b)^n$.

Théorème

Pour tout a, b réels et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Le binôme de Newton

Exemple

$(1+x)^5$ *pour tout réel* x

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}1^p x^{5-p} = \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}x^p 1^{5-p}\\ &= \binom{5}{0}x^0+\binom{5}{1}x^1+\binom{5}{2}x^2+\cdots+\binom{5}{5}x^5\\ &= x^0+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \text{ par le triange de Pascal.}\end{aligned}$$

Exemple

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x\in\mathbb{R}$, *on veut calculer* $A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. *Ici c'est le binôme de Newton avec* $a=b=1$. *En effet*

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Longrightarrow 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Le binôme de Newton

Exemple

Soit à calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$ *?*

On a $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p 1^{n-p} = (2+1)^n = 3^n$$

Exemple

Soit $S_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$*? Elle ressemble à un binôme de Newton.*

En effet $(1+(-1))^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^{2n-i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ *ainsi*

$0^{2n} = \binom{2n}{0}(-1)^0 + \binom{2n}{1}(-1)^1 + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *En d'autres termes*

$0 = 1 + 2n(-1) + \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$. *D'où* $-1 + 2n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i$.

Sommes doubles

a) **Somme double indexée par un rectangle**

Soit $(a_{i,j})_{i\in[\![m,n]\!],j\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j. La somme de tous ces nombres est notée $\sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij}$. Pour cette somme, en notant par $L_i := \sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ avec $i \in [\![m,n]\!]$ et par $C_j = \sum_{i=m}^{n} a_{ij}$ avec $j \in [\![p,q]\!]$. Alors $\sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} L_i = \sum_{j=p}^{q} C_j$.

En particulier, on a l'égalité des deux écritures

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij} := \sum_{m\leq i\leq n, p\leq j\leq q} a_{ij}.$$

Sommes doubles

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$, *calculons* $S_n = \sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^i$:

- *D'une part*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{n}(n+1)2^i = (n+1)\sum_{i=0}^{n} 2^i \\ &= (n+1)\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (n+1)(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

- *D'autre part*

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{j=0}^{n}\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - 1 = (n+1)(2^{n+1}-1)$$

b) **Somme double indexée par un triangle**

Soit $(a_{i,j})_{m\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres indexée par les entiers i et j appartenant à $[\![m,n]\!]$, mais seulement pour les couples (i,j) tel que $i\leq j$.

Pour calculer la somme $\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ on peut poser $L_i=\sum_{j\geq i}^{n} a_{ij}$ et $C_j=\sum_{i\leq j}^{n} a_{ij}$. Ainsi on pourra avoir deux façons d'expliciter la somme $\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ soit en sommant ligne par ligne c'est-à-dire $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ ou bien en sommant colonne par colonne c'est-à-dire $\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}$.

En résumé, la somme double indexée par un triangle s'écrit :

$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

Sommes doubles

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons la quantité $D_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$. Ici on remarque que les indices ont une contrainte triangulaire $1 \leq i \leq j \leq n$.

$$D_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2}$$

$$\text{D'où } D_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2}\right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Produit de deux sommes finies

Soient $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de nombres réels. Comment développer le produit suivant

$$P = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)?$$

Attention : Il faut pas commettre l'erreur en disant que $P = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. C'est Faux.

Pour calculer formellement un tel produit il faut commencer par changer le nom d'un des indices. Puis développer le produit en utilisant la "distributivité" $P = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k$.

Les ensembles

Les ensembles

Definition

Un ensemble est une collection bien définie d'objets qu'on appelle éléments.

Exemple

soit Ω, *l'ensemble de toutes les sommes possibles obtenues en lançant deux dés. Alors* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *et les nombres* $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ *sont les éléments de* Ω.

Les ensembles qu'on a fréquemment l'habitude d'employer sont
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$ des entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$ des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels c'est-à-dire s'écrivant sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
$\mathbb{R}$ l'ensemble formé par tous les nombres réels.

Les ensembles

Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, qu'on appelle l'ensemble vide et qui est noté par $\emptyset$.

Definition

(Il s'agit d'un rappel)
Le symbole $\in$ indique qu'un élément appartient à un ensemble. À l'inverse le symbole $\notin$ indique qu'un élément n'appartient pas à un ensemble.

Exemple : $a \in \{a, e, i, o, u\}$; $k \notin \{a, e, i, o, u\}$; $2 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Les sous-ensembles (notion d'inclusion)

Definition

Soit Ω un ensemble. On dit que A est un sous-ensemble de Ω si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de Ω. Ainsi l'ensemble A est inclus dans l'ensemble Ω. La notation $A \subseteq \Omega$ est utilisée pour symboliser l'inclusion de A dans Ω.

Remarque

Le symbole $\not\subset$ indique qu'un ensemble n'est pas inclus dans un autre. Ainsi $A \not\subset B$ exprime donc qu'au moins un élément de A n'est pas un élément de B.

Les sous-ensembles (notion d'inclusion)

Exemple

En revenant sur l'ensemble Ω *comme étant la somme des résultats de deux dés c'est-à-dire* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. *On peut citer les quelques sous-ensembles suivants :*

$\Omega_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *: ensemble des résultats pairs*

$\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *: ensemble des résultats inférieurs ou égaux à 6.*

$\Omega_3 = \emptyset$ *: ensemble des résultats supérieurs strictement à 12*

$\Omega_4 = \{11\}$ *: ensemble des résultats divisible par 11.*

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$; $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\} \not\subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

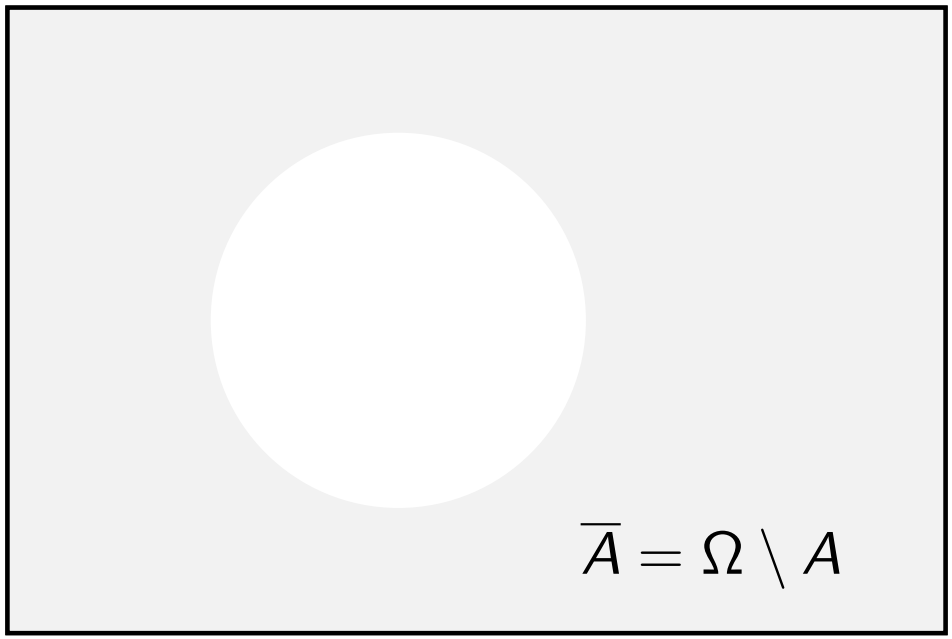
Opérations sur les ensembles

Nous présentons ici les opérations ensemblistes les plus importantes.

a) Complément d'un ensemble

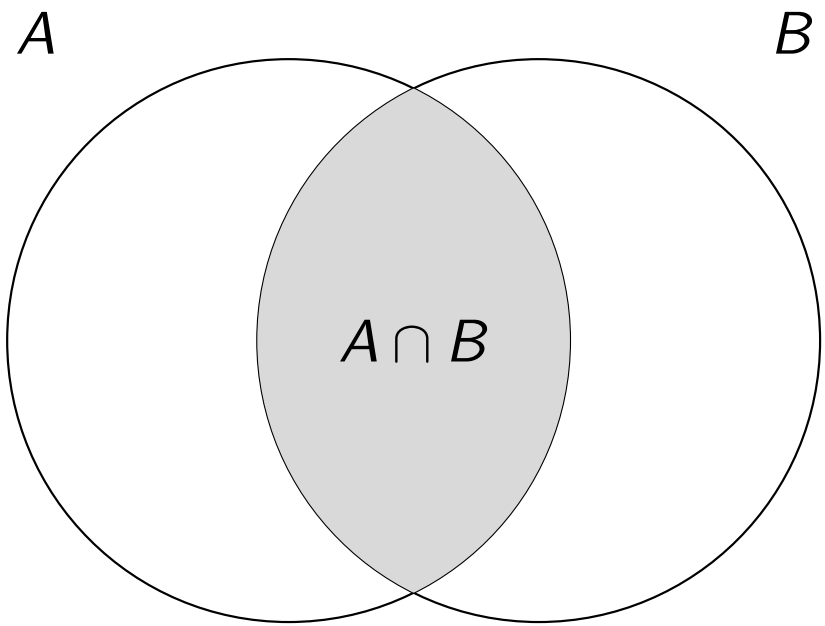
Soit Ω un ensemble et soit $A \subseteq \Omega$. Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A :

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \,;\, x \notin A\}.$$



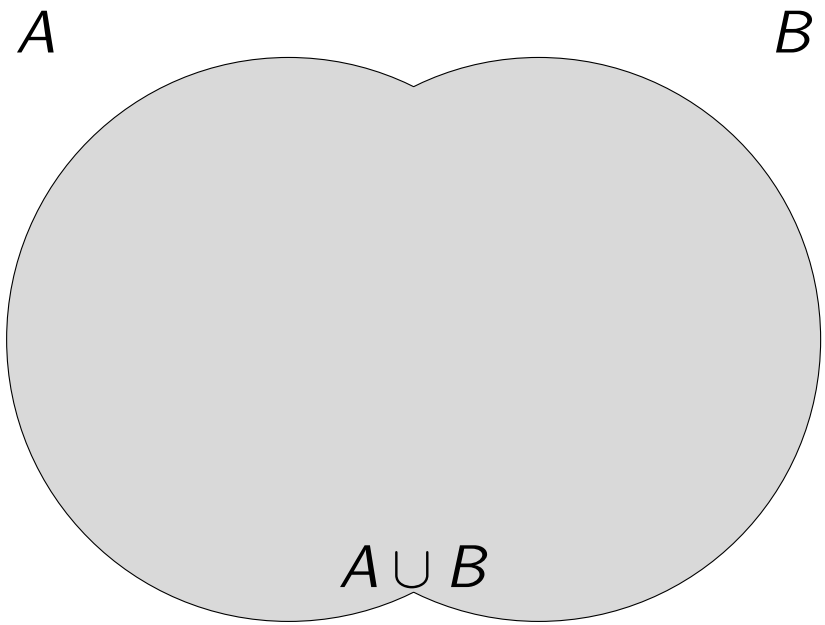
b) **Intersection d'ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B.



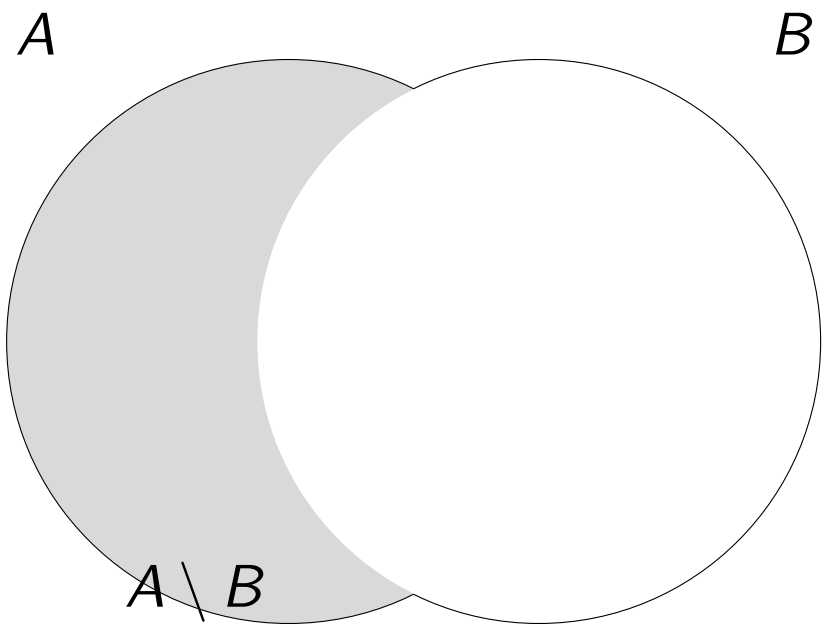
c) **Union de deux ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle union des deux ensembles A et B, l'ensemble noté $A \cup B$, représentant tous les éléments appartenant soit à A ou à B (éventuellement aux deux).



d) **Différence de deux ensembles**

Soient A et B deux ensembles. On appelle différence de A et B, notée $A \setminus B$, l'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.



Opérations sur les ensembles

Remarque

(Différence symétrique) Soient A et B deux ensembles, on appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$ (lire A delta B), l'ensemble constitué par la réunion des éléments de A qui ne sont pas dans B, et des éléments de B qui ne sont pas dans A.

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Exercice (à faire)
Reprenons l'ensemble Ω concernant les dés. Soient les sous-ensembles de Ω : Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 précédemment définis.

- Ecrire les éléments des sous-ensembles obtenus par les opérations suivantes : complémentaire ; intersection ; union ; différence.

Produit cartésien de 2 ensembles

Definition

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, l'ensemble noté $E \times F$ des couples (a, b) où a est un élément de E et b un élément de F.
Par exemple, si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, alors
$E \times F = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$.
Ce produit n'est pas commutatif, c'est-à-dire $E \times F$ peut être différent de $F \times E$.

Exemple

Le plan, $\mathbb{R}^2$, est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarque

Lorsque E et F sont deux ensembles finis, alors le nombre d'éléments de $E \times F$ est le produit du nombre d'éléments de E et du nombre d'éléments de F.

Produit cartésien d'ensembles

Definition

Soit E un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de E, le nombre d'éléments de E et on le note $card(E)$ ou par $|E|$.

Propriété

Soient $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_p$, p ensembles finis, alors

$$card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \cdots \times card(E_p).$$

Ensemble des parties d'un ensemble (recouvrement, partition)

Definition

Si A est un ensemble, l'ensemble des parties de A est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A. Il est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$, *les parties de* A *sont*
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
On a donc $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Propriété

- *Si* A *contient* n *éléments,* $\mathcal{P}(A)$ *contient exactement* 2^n *éléments.*
- *Si* A *est infini, alors* $\mathcal{P}(A)$ *est également infini.*

Recouvrement, partition

a) **Recouvrement** : Soit X un ensemble, A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille de parties de X dont la réunion contient A. En d'autres termes, il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X telles que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ce recouvrement est dit fini si I est fini.

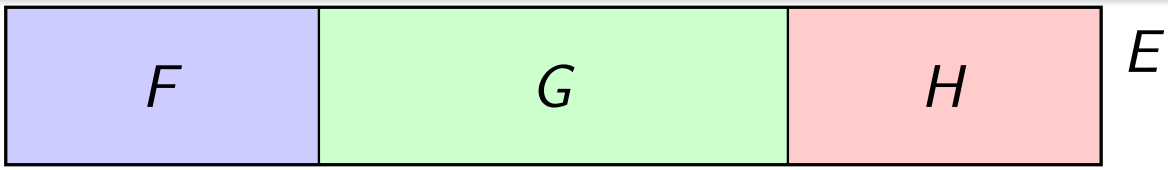
En particulier, un recouvrement de X vérifie $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

b) **Partition** : Une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X est une partition si :

1. $X = \bigcup_{i\in I} U_i$;
2. les ensembles U_i sont deux à deux disjoints : $i \neq j \Longrightarrow U_i \cap U_j = \emptyset$.

Exemple

Si E est le rectangle ci-dessous, alors les petits rectangles coloriés F, G, H constituent une partition de E.



Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

Pour exprimer avec précision les propriétés des ensembles et des éléments qui les composent, on utilise souvent les quantificateurs. Il en existe deux :

- La locution "pour tout" ou "quelque soit", appelée quantificateur universel et notée $\forall$.
- La locution "il existe", appelée quantificateur existentiel et notée $\exists$.

Exemple

$\forall x \in E$, $P(x)$ se lit " pour tout x appartenant à l'ensemble E, la propriété P est vraie". Ici le symbole "$\forall$" signifie donc que la propriété P est vérifiée pour tout x de l'ensemble E.

Exemple

$\exists x \in E$, $P(x)$ se lit " il existe x appartenant à l'ensemnle E, tel que la proriété P est vraie". Ici le symbole " $\exists$ " signifie donc qu'il existe (au moins) un x de l'ensemble E vérifiant la propriété P.

Manipulation des ensembles à l'aide des quantificateurs

Remarque

a) *Attention, la locution "il existe" ne signifie pas "il existe un et un seul", mais bien "il existe au moins un". Autrement dit, cette locution assure qu'il existe au moins un élément, et donc éventuellement plusieurs, vérifiant une propriété donnée, mais n'assure pas que cet élément soit unique. Pour l'expression "il existe un et un seul " ou "il existe un unique " se note* $\exists!$.

Remarque

b) *Attention l'ordre d'utilisation des quantificateurs a une importance. En effet dire :* $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq n$ *se lit "pour tout entier n, il existe un entier k tel que k est plus grand que n" ou encore " tout entier relatif n admet un plus grand entier relatif k". Cette proposition est vraie puisque* $n+1$ *est toujours plus grand que n, quel que soit l'entier n.*
En revanche, dire : $\exists\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ k \geq n$ *se lit "il existe un entier n tel que pour tout entier k, k est plus grand que n" ou encore "il existe un entier n qui est plus petit que tout entier k". Bien évidemment cette proposition est fausse (en effet il suffit de choisir* $k = n - 1$*).*

Les bases de logique

Origines de la logique

L'objectif ici est de bien définir le vocabulaire, les notations et le propriétés que nous utiliserons non seulement dans ce chapitre, mais également dans toutes les preuves de résultats que nous développerons que ce soit en cours ou en travaux dirigés. A partir de ce chapitre, il faudra donc construire les démonstrations de la façon la plus rigoureuse possible, en utilisant les bons quantificateurs, dans le bon ordre, mais également des stratégies de preuves (absurde, contraposée, récurrence par exemple).

Definition (Assertion)

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une et une seule des deux valeurs de vérité :

vrai (V) ou faux (F).

Cette propriété correspond au principe du **tiers exclu** : une assertion est soit vraie, soit fausse.

Assertions et prédicats

Exemple

1. *L'énoncé "Paris est la capitale de la France", est* ***vrai (V)****.*
2. *L'énoncé "24 est un multiple de 2", est* ***vrai (V)****.*
3. *L'énoncé "19 est un multiple de 2", est* ***faux (F)****.*

Definition (Prédicat)

Un **prédicat** est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées "variables" tel que, quand on remplace chacune des lettres par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Assertions et prédicats

Exemple

1. *L'énoncé : $P(n)$ =“n n'est pas un multiple de 2”, est un **prédicat**, car il devient une **assertion** quand on donne une valeur à n. Par exemple,*
   $P(10)$=“10 n'est pas un multiple de 2” est une assertion fausse.
   $P(11)$=“11 n'est pas un multiple de 2” est une assertion vraie.
2. *L'énoncé $P(x, A)$=“$x \in A$”, est un **prédicat** à deux variables. Il devient une **assertion** quand on donne une valeur aux deux variables. Par exemple,*
   $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie,
   $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une assertion fausse.

Remarque

Une assertion peut s'interpréter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux.

Les connecteurs logiques

Definition (Négation d'un prédicat)

Soit P un prédicat, la négation de P est le prédicat non(P), qui est faux lorsque P est vrai ; vrai lorsque P est faux.

On résume en général ceci dans une table de vérité, comme suit

P	non P
V	F
F	V

Table de vérité pour non (P)

Exemple

1. *P="24 est un multiple de 2" est une assertion vraie (V), non (P)="24 n'est pas un multiple de 2" est une assertion fausse (F).*
2. *A partir du prédicat "$x \in A$", nous pouvons définir le prédicat non($x \in A$) qui est "$x \notin A$".*

Les connecteurs logiques

Definition (Conjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P et Q" est appelé **conjonction** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,
- faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table de vérité pour la conjonction

Notation (à retenir)

Nous écrivons parfois $P \wedge Q$ pour "P et Q".

Les connecteurs logiques

Exemple

1. *Soient P le prédicat "$x \in [0,4]$" et Q le prédicat "$x \in [2,8]$", le prédicat $P \wedge Q$ est "$x \in [2,4]$".*
2. *Soient P le prédicat "$x \in A$" et Q le prédicat "$x \in B$", le prédicat $P \wedge Q$ est "$x \in A \cap B$".*

Definition (Disjonction)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P ou Q" est appelé **disjonction** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats est vrai,
- faux lorsque les deux prédicats sont faux simultanément.

Les connecteurs logiques

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité pour la disjonction

Notation (à retenir)

Nous écrivons parfois $P \vee Q$ pour "P ou Q".

Exemple

1. *Soient P le prédicat "$x \in [0,4]$" et Q le prédicat "$x \in [2,8]$", le prédicat $P \vee Q$ est "$x \in [0,8]$".*
2. *Soient P le prédicat "$x \in A$" et Q le prédicat "$x \in B$", le prédicat $P \vee Q$ est "$x \in A \bigcup B$".*

Definition (Implication)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Rightarrow Q$" est appelé **implication** de P et Q. C'est un prédicat qui est :
-faux lorsque P est vrai et Q est faux,
-vrai dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table de vérité pour l'implication

Les connecteurs logiques

Remarques

1. *On dit que P est une* ***condition suffisante*** *pour Q.*
2. *On dit que Q est une* ***condition nécessaire*** *pour P.*
3. *L'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.*

Definition (Équivalence)

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "$P \Leftrightarrow Q$" est appelé **équivalence** de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,
- faux dans tous les autres cas.

Exemple

Considérons les prédicats $P =$ "x est divisible par 4" et $Q =$ "x est pair". Alors $P \Rightarrow Q$ est vraie : tout entier divisible par 4 est pair. En revanche, la réciproque $Q \Rightarrow P$ est fausse : 6 est pair mais n'est pas divisible par 4.

Les connecteurs logiques

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table de vérité pour l'équivalence.

Remarques

1. $(P \Rightarrow Q)$ *et* $(Q \Rightarrow R)$ *se note* $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$,
2. $(P \Leftrightarrow Q)$ *et* $(Q \Leftrightarrow R)$ *se note* $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$.

Propriétés

Definition (Logiquement équivalents)

Soient P_1 et P_2 deux prédicats. On dit que P_1 et P_2 sont **logiquement équivalents** s'ils ont les mêmes valeurs de vérité pour toutes les valeurs possibles de leurs variables. On note alors $P_1 \equiv P_2$.
Dans le cas contraire, on écrit $P_1 \not\equiv P_2$.

Exemple

1. *Soit P un prédicat, $non(non(P)) \equiv P$.*
2. *Soient P et Q deux prédicats, $(P$ et $(P$ ou $Q)) \equiv P$.*

Propriétés

Considérons maintenant un prédicat P, qui peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux. Considérons ensuite le prédicat composé

$$R = \text{“}P \text{ ou non} P\text{”}.$$

Ce prédicat est toujours vrai indépendamment du choix de P. En effet, avec la table de vérité, nous avons,

P	non (P)	P ou non(P)
V	F	V
F	V	V

Table de vérité pour une tautologie

Ce prédicat R est appelé **tautologie**.

Definition (Tautologie)

Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité qui le composent, est appelé une **tautologie**.

Propriétés

D'un autre côté, considérons le prédicat composé

$$Q = \text{“}P \text{ et non}(P)\text{”}.$$

Ce prédicat est toujours faux. En effet, avec la table de vérité, nous avons,

P	non (P)	P et non(P)
V	F	F
F	V	F

Table de vérité pour une incompatibilité

Nous disons que les prédicats P et non$P$ sont incompatibles.

Definition (Incompatibilité)

On dit que deux prédicats P et Q sont incompatibles si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.

Propriétés

Proposition (Lois de De Morgan)

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \text{non}\,(P \text{ ou } Q) & \equiv & (\text{non } P \text{ et non } Q) \\ \text{non}\,(P \text{ et } Q) & \equiv & (\text{non } P \text{ ou non } Q) \end{array}$$

*Ce sont les **lois de De Morgan** pour les prédicats.*

Exercice : Écrire la négation de : $x > 0$ et $x < 3$?

Proposition (Équivalences logiques avec trois prédicats)

Soient P, Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$\begin{array}{lcl} P \text{ ou } (Q \text{ et } R) & \equiv & (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R) \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) & \equiv & (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R) \end{array}$$

Proposition (Équivalences logiques avec trois prédicats)

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes

$$P \Rightarrow Q \equiv (\text{non } P \quad \text{ou} \quad Q),$$

nous disons que Q est une ***condition nécessaire*** *pour P.*

$$\begin{array}{lcl} \text{non}(P \Rightarrow Q) & \equiv & (P \ \text{ et } \ \text{non } Q) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & \text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q) \ \text{ et } \ \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P) \\ (P \Leftrightarrow Q) & \equiv & ((P \Rightarrow Q) \ \text{ et } \ (Q \Rightarrow P)) \end{array}$$

Notons que $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ est la ***contraposée*** *de $P \Rightarrow Q$.*

Quantificateurs mathématiques

A partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, nous construisons de nouvelles assertions, que l'on appelle assertions quantifiées, en utilisant les quantificateurs "quel que soit" et "il existe".

Definition (Quantificateur $\forall$)

Le quantificateur universel, noté $\forall$, se lit "pour tout" ou "quel que soit". L'expression

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E.

Exemple

1. " $\forall x \in [-3, 1], \ \ x^2 + 2x - 3 \leq 0$ " *est vraie,*
2. " $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n-3)n \geq 0$ " *est fausse,*
3. " $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n^2$ *pair* $\Rightarrow n$ *pair)* " *est vraie.*

Quantificateurs mathématiques

Definition (Quantificateur $\exists$)

Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, se lit "il existe". L'expression $\exists x \in E,\ P(x)$ signifie qu'il existe au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

Remarque

Si un unique élément de E vérifie $P(x)$, on écrit $\exists!\, x \in E,\ P(x)$.
On dit alors qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple

1. *L'assertion quantifiée "$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$" est vraie.*
2. *L'assertion quantifiée "$\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 1$" est vraie.*

Quantificateurs mathématiques

Remarque

Notons que si "$\forall\, x \in E,\ P(x)$" est vraie, alors "$\exists\, x \in E,\ P(x)$" est vraie.



Attention :

il faudra manipuler avec précaution les assertions de la forme "$\exists\,!\, x \in E,\ P(x)$" pour lesquelles la notation $\exists\,!$ n'est pas un quantificateur bien qu'il en ait l'air !

En effet, si nous posons

$$R_1 = \text{"}\exists\, x \in E,\ P(x)\text{"} \text{ (c'est l'existence)}$$

et

$$R_2 = \text{"}\forall\, x \in E,\ \forall\, x' \in E,\ ((P(x) \text{ et } P(x')) \Rightarrow (x = x')\text{"} \text{ (c'est l'unicité),}$$

nous avons alors

$$(\exists\,! x \in E, P(x)) \equiv (R_1 \text{ et } R_2).$$

Quantificateurs mathématiques

Proposition (Équivalences logiques et quantificateurs)

Soit $P(x)$, un prédicat, nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$non(\forall\, x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad (\exists\, x \in E,\ non(P(x)))$$
$$non(\exists\, x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad (\forall\, x \in E,\ non(P(x)))$$

Exemple

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats sur E. Nous avons,

$non(\forall\, x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))) \equiv (\exists\, x \in E,\ P(x)$ *et* $non(Q(x)))$

$non(\exists\, !\, x \in E,\ P(x)) \equiv (\forall x \in E\ non(P(x))$ *ou* $(\exists (x \neq y),\ P(x) \wedge P(y)))$

Exemple

$non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0)$ *équivaut à* $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$.

Elle est vraie, avec $x = 0$.

Quantificateurs mathématiques

Definition (Prédicats à deux variables)

Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables, $x \in E$ et $y \in F$.
L'assertion quantifiée

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x, y),$$

est vraie lorsque tous les éléments $x \in E$ et tous les éléments $y \in F$, vérifient $P(x, y)$.
L'assertion quantifiée

$$\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y),$$

est vraie lorsqu'il existe au moins un élément $x \in E$ et qu'il existe au moins un élément $y \in F$ qui vérifient $P(x, y)$.

Quantificateurs mathématiques

Remarque

Nous pouvons combiner des quantificateurs de natures différentes. Mais attention, il faut respecter les règles suivantes :

$$(\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad (\forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x,y)),$$
$$(\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \equiv \quad (\exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x,y)).$$



Attention :

il ne faut pas permuter des quantificateurs différents !

$$(\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x,y)) \quad \not\equiv \quad (\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x,y)).$$

Raisonnement sous hypothèse

Pour montrer qu'un énoncé Q est vrai, nous nous appuyons sur la tautologie suivante $(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$. C'est bien une tautologie, comme le montre la table de vérité suivante

P	Q	P ⇒ Q	P et (P ⇒ Q)	(P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Table de vérité pour la tautologie (P et (P ⇒ Q)) ⇒ Q

1. Nous montrons que P est vrai (en pratique il s'agit d'un énoncé évident),
2. puis nous montrons que $P \Rightarrow Q$ est vrai,
3. nous nous retrouvons sur la première ligne de la table de vérité, ce qui montre que Q est vrai.

Raisonnement sous hypothèse

Exemple

Montrons que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

On pose P : "n est pair" et Q : "n^2 est pair".
Nous voulons démontrer $P \Rightarrow Q$.
Preuve. *Supposons que n soit pair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.*
Ainsi

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

donc n^2 est pair.
On a donc démontré

$$P \Rightarrow Q.$$

Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé P est vrai, on peut raisonner par **l'absurde**. On suppose alors que P est faux et on cherche à obtenir une contradiction. Ce raisonnement repose sur l'équivalence logique

$$((\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))) \equiv P.$$

En effet, si non(P) était vrai, alors on pourrait démontrer à la fois Q et non(Q), ce qui est impossible.

P	Q	non(P)	non(Q)	non$(P) \Rightarrow Q$	non$(P) \Rightarrow$ non(Q)	$(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \wedge (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Table de vérité utilisée pour le raisonnement par l'absurde.

Raisonnement par l'absurde

Remarque

Dans la pratique, pour démontrer que P est vrai par l'absurde :

1. *on suppose que P est faux, c'est-à-dire que non(P) est vrai ;*
2. *sous cette hypothèse, on raisonne jusqu'à obtenir une contradiction ;*
3. *on en déduit que l'hypothèse non(P) est fausse ;*
4. *par conséquent, P est vrai.*

Schéma du raisonnement

$$\boxed{\text{non}(P)} \implies \boxed{\text{contradiction}} \implies \boxed{P}$$

Raisonnement par contre exemple

Ce raisonnement sert à montrer qu'un énoncé de la forme $\forall\, x \in E,\ \ P(x)$ est faux. Pour cela, nous montrons que sa négation est vraie. Autrement dit $\text{non}(\forall\, x \in E,\ \ P(x)) \ \equiv\ (\exists\, x \in E,\ \text{non}(P(x)))$. Pour cela nous montrons qu'il existe un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exemple

1. *Montrons que* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \Rightarrow\ x = 0)$ *est faux. La négation de cet énoncé est* $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \ \exists\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \text{ et } \ x \neq 0)$. *Nous rappelons en effet que la négation de* $(P \Rightarrow Q)$ *est* $(P \text{ et non}(Q))$.
   Si $x = 1$ *et* $\varepsilon = 2$, *nous avons* $|x| < \varepsilon$ *et* $x \neq 0$, *la négation de l'énoncé est vraie, donc l'énoncé est faux.*
2. *Attention, il ne faut pas confondre* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ (|x| < \varepsilon \ \Rightarrow\ x = 0)$ *avec* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ ((\forall\, \varepsilon > 0,\ \ |x| < \varepsilon) \ \Rightarrow\ x = 0)$.

Raisonnement par contraposée

Supposons que l'on souhaite démontrer une implication

$$P \Rightarrow Q.$$

Plutôt que de démontrer directement cette implication, on peut démontrer sa **contraposée** :

$$\boxed{P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P).}$$

Les deux propositions sont logiquement équivalentes.

Principe

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il suffit donc de démontrer

$$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P).$$

Raisonnement par contraposée

Exemple

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 *pair* $\Rightarrow$ n *pair.*
Il est plus simple de démontrer la contraposée : n *impair* $\Rightarrow$ n^2 *impair.*
En effet, si n *est impair, alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2k + 1$.
Ainsi

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

donc n^2 *est impair.*
La contraposée est vraie, donc $\boxed{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair.}}$

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'un énoncé

$$P(n)$$

est vrai pour tout entier naturel $n \geq n_0$.
Il repose sur deux étapes fondamentales :

1. **Initialisation :** on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** on montre que, pour tout $k \geq n_0$,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

On peut alors conclure que

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad P(n) \text{ est vraie.}}$$

Raisonnement par récurrence forte

Dans certaines situations, pour démontrer $P(k+1)$, il est nécessaire d'utiliser plusieurs résultats précédents et pas seulement $P(k)$.
On utilise alors la **récurrence forte**.

1. **Initialisation :** on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** on suppose que

$$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k)$$

sont toutes vraies et on démontre que $P(k+1)$ est vraie.

Autrement dit,

$$\boxed{(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1).}$$

Les différents modes de démonstration

À retenir

Selon la forme de l'énoncé, plusieurs stratégies de démonstration sont possibles :

- **Hypothèse auxiliaire :** partir d'une hypothèse connue et établir une implication.
- **Raisonnement par l'absurde :** supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer et obtenir une contradiction.
- **Raisonnement par contraposée :** pour démontrer $P \Rightarrow Q$, démontrer $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.
- **Contre-exemple :** pour réfuter $\forall x \in E,\ P(x)$, trouver un $x \in E$ tel que $\text{non}(P(x))$.
- **Récurrence :** démontrer une propriété pour tous les entiers à partir d'un rang donné en utilisant l'initialisation et l'hérédité.

Les Applications d'un ensemble vers un autre ensemble

Applications

Soient E et F deux ensembles.

Definition

Une **application** $f : E \to F$ associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$.
L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** et F **ensemble d'arrivée**.

À retenir

Pour définir une application $f : E \to F$, il faut donc préciser :

- l'ensemble de départ E ;
- l'ensemble d'arrivée F ;
- l'image $f(x)$ de chaque élément $x \in E$.

Applications

Exemple

1. $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

   est une application.

2. $$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n-1 \end{array}$$

   n'est pas une application car, par exemple,

   $$g(0) = -1 \notin \mathbb{N}.$$

Applications : vocabulaire

Remarque

1. *Le* ***graphe*** *de* $f : E \to F$ *est*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \ ; \ y = f(x)\}.$$

2. *Soient* $f : E \to F$ *et* $g : G \to H$ *deux applications. On a*

$$f = g$$

si et seulement si

$$E = G, \qquad F = H$$

et

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x).$$

3. *Soit* $f : E \to F$ *et soit* $y \in F$*. Un élément* $x \in E$ *tel que*

$$f(x) = y$$

Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

Definition (Image directe)

Soit $A \subset E$. L'**image directe** de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \; ; \; x \in A\} \subset F.$$

Definition (Image réciproque)

Soit $B \subset F$. L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \; ; \; f(x) \in B\} \subset E.$$

Image directe et image réciproque

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 2x+1. \end{array}$$

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. *Alors*

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(0), f(1), f(2)\} \\ &= \{1, 3, 5\}. \end{aligned}$$

D'autre part, si $B = \{5\}$, *alors*

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{N} \,;\; f(x) = 5\} \\ &= \{2\}. \end{aligned}$$

Image directe et image réciproque

Propriété

Soit $f : E \to F$ une application et soient $A_1, A_2 \subset E$.

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
4. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Attention

En général,

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2).$$

L'égalité est vraie si f est injective.

Image directe et image réciproque

Propriété

Soient $B_1, B_2 \subset F$.

1. $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$
2. $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
3. $$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

Injection

Definition

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est **injective** si deux éléments distincts de E ont des images distinctes. Autrement dit, $\boxed{\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.}$

De manière équivalente, $\boxed{\forall x, x' \in E, \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').}$

Ainsi, tout élément de F possède **au plus un antécédent**.

Exemple

a) *l'application* $\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto 2n+1 \end{array}$ *est injective car :*

$\forall\, n, n' \in E :\ f(n) = f(n') \Longrightarrow 2n+1 = 2n'+1 \Longrightarrow n = n'.$

b) *l'application* $\begin{array}{lll} g : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 5x+3 \end{array}$ *est injective car :*

$\forall\, x, x' \in E :\ f(x) = f(x') \Longrightarrow 5x+3 = 5x'+3 \Longrightarrow x = x'.$

Surjection

Definition

Soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.
Autrement dit,

$$\boxed{\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.}$$

Exemple

Considérons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n + 1$.
Cette application n'est pas surjective.
En effet, si elle était surjective, l'entier 2 *devrait avoir un antécédent* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $2n + 1 = 2$. *On obtiendrait* $n = \frac{1}{2}$, *ce qui est impossible puisque* $n \in \mathbb{N}$.
En revanche, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 5x + 3$ *est surjective car, pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *on peut choisir* $x = \frac{y-3}{5} \in \mathbb{R}$.

Bijection

Definition

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

De manière équivalente, $\boxed{\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y.}$

Autrement dit, tout élément de F possède un **unique antécédent** dans E.

À retenir

$$\boxed{\text{bijection} = \text{injection} + \text{surjection.}}$$

Exemple

a) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$ *f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.*

b) *L'application g précédemment définie est bijective.*

Composition d'applications

Definition

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F, \quad g : F \to G$ deux applications.
On définit une application $g \circ f : E \to G$ appelée **composée de f et g**, définie par

$$\boxed{\forall x \in E, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)).}$$

Attention

Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g.

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)).$$

Exemple

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x}, \end{array}$ *alors* $g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}. \end{array}$

La composition d'application

Proposition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. *La composée de deux injections est une injection, c'est-à-dire, (Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective).*
2. *La composée de deux surjections est une surjection, c'est-à-dire, (Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective).*
3. *La composée de deux bijections est une bijection, c'est-à-dire, (Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective).*
4. *Si f et g sont bijectives. Alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

La composition d'application

Démonstration :

1. Supposons que f et g sont injectives, montrons que $g \circ f$ est injective. $\forall\, x_1,\, x_2 \in E,\ (g \circ f)(x_1) = g \circ f(x_2)$ puisque g est injective on aura : $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective ainsi on en déduit l'implication : $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, ce qui montre alors que $g \circ f$ est injective.
2. (Exercice à faire)
3. (Exercice à faire)
4. (Exercice à faire)

La composition d'application

Proposition

1. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
3. *Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.*

Remarque

Soit $f : E \to F$ une bijection.
Alors chaque élément $y \in F$ possède un unique antécédent $x \in E$.
On peut donc définir une application $f^{-1} : F \to E$ appelée ***application réciproque*** *de f. Elle vérifie $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.*
De plus, f^{-1} est elle-même bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Application réciproque

Proposition

Si $f : E \to F$ est une bijection, alors $\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E}$ *et* $\boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F}$.

En effet,

$$\forall x \in E, \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

et

$$\forall y \in F, \qquad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Applications : à retenir

Soit $f : E \to F$ une application.

Propriété	**Caractérisation**
Injective	$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Surjective	$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$
Bijective	$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$

Mémo

Injective : au plus un antécédent
Surjective : au moins un antécédent
Bijective : exactement un antécédent

Nombres complexes

Nombres complexes : forme algébrique

Definition ($\mathbb{R}^2$)

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (a, b) de nombres réels.
Deux éléments (a, b) et (a', b') de $\mathbb{R}^2$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Maintenant que nous avons défini $\mathbb{R}^2$ essayons de mettre cet ensemble en relation avec les complexes.

Definition (Nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition et d'une multiplication définies pour tous (a, b) et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ par

1. $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$,
2. $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Nombres complexes : forme algébrique

Notation (Convention pour les réels)

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *nous conviendrons d'identifier le nombre complexe* $(x, 0)$ *et le réel* x.
2. *L'ensemble des réels est donc identifié à l'ensemble des nombres complexes de la forme* $(x, 0)$ *où* $x \in \mathbb{R}$.

Notation (Imaginaire)

Le nombre complexe $(0, 1)$ *est noté* i.

Nombres complexes : forme algébrique

En conséquence, nous avons alors la possibilité d'écrire :

1. pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b),$$
2. pour tout $b \in \mathbb{R}$,
$$i(b, 0) = (0, 1)(b, 0) = (0, b),$$
3. Et finalement nous pouvons écrire pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) = a + ib.$$

Partie réelle, partie imaginaire et conjugué

Propriété (Égalité de deux complexes)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. $a + ib = 0$ *équivaut à* $a = 0$ *et* $b = 0$,
2. $a + ib = a' + ib'$ *équivaut à* $a = a'$ *et* $b = b'$.

Definition (Partie réelle partie imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Il existe un couple unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

1. $a + ib$ est appelée forme algébrique du complexe z,
2. a est appelée partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$,
3. b est appelée partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$.

Partie réelle, partie imaginaire et conjugué

Nous noterons l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$.

Propriété (Réel et Imaginaire pur)

1. *Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire pure est nulle, c'est à dire : $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $Im(z) = 0$.*
2. *Un nombre complexe est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle, c'est à dire $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $Re(z) = 0$.*

Propriété (Addition et produit : forme algébrique)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. *Somme : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$,*
2. *Produit : $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$,*
3. *Carré de i : $i^2 = -1$. Le nombre i ne peut pas être un réel (c'est un nombre négatif égal à un carré).*

Definition (Conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de notation algébrique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous appelons conjugué de z le nombre complexe $a - ib$, que nous noterons $\overline{z}$.

Nous avons quelques propriétés pour les conjugués.

Propriété (Propriétés du conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

1. *le conjugué de $\overline{z}$ est, $\overline{(\overline{z})} = z$,*
2. $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *et* $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
3. $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z = \overline{z}$,
4. $z \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $z = -\overline{z}$.

Ainsi, deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Calculs sur les complexes

Nous avons plusieurs propriétés supplémentaires sur l'addition et la multiplication des complexes.

Propriété (Propriétés de l'addition)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, l'addition dans $\mathbb{C}$ est

1. *Commutative : $z + z' = z' + z$,*
2. *Associative : $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$,*
3. *0 est l'élément neutre : $z + 0 = z$,*
4. *Symétrique : tout complexe z admet un symétrique dans $\mathbb{C}$, c'est $-z$ (l'opposé de z), sous forme algébrique, si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $-z = -a - ib$.*

Calculs sur les complexes

Propriété (Propriétés de la multiplication)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, la multiplication dans $\mathbb{C}$ est

1. *Commutative :* $zz' = z'z$,
2. *Associative :* $z(z'z'') = (zz')z''$,
3. 1 *est l'élément neutre :* $z \times 1 = z$,
4. *Pour tout nombre complexe* $z \neq 0$, *il existe* $z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$ *tel que* $zz' = 1$. *Nous notons ce nombre* $\frac{1}{z}$ *ou encore* z^{-1}, *et c'est l'inverse de* z. *Sous forme algébrique, pour* $z = a + ib \neq 0$, *alors* $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Calculs sur les complexes

Propriété (Sommes et produits de conjugués)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$,
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\ \overline{z}'$,
3. *pour* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}'}$.

Propriété (Sommes des $n+1$ premières puissances de z)

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 1$, alors

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$