
Feuille d'exercices n° 5

Ensembles et applications

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

a) la fonction f s'annule ;

b) la fonction f est toujours nulle ;

c) f n'est pas une fonction constante ;

d) f est croissante ;

e) f est décroissante ;

f) f présente un minimum ;

g) f présente un maximum.

Solutions

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$
2. $\forall x \in I, f(x) = 0$
3. $\exists (x, y) \in I,\ f(x) \neq f(y)$
4. $\forall (x, y) \in I,\ (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$
5. $\forall (x, y) \in I,\ (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y))$
6. $\exists x \in I,\ \forall y \in I, f(x) \leq f(y)$
7. $\exists x \in I,\ \forall y \in I, f(x) \geq f(y)$

Exercice 2. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Solutions

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I, f(x) \neq 0$
3. $\forall (x, y) \in I,\ f(x) = f(y)$
4. $\exists (x, y) \in I,\ x < y$ et $f(x) > f(y)$
5. $\exists (x, y) \in I,\ x < y$ et $f(x) < f(y)$
6. $\forall x \in I,\ \exists y \in I, f(x) > f(y)$
7. $\forall x \in I,\ \exists y \in I, f(x) < f(y)$

Exercice 3. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

   Solutions

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big[(A \cup B) \cap (B \cup C)\big] \cap (C \cup A) &= \big[B \cup (A \cap C)\big] \cap (C \cup A) \\ &= \big[B \cap (C \cup A)\big] \cup \big[(A \cap C) \cap (C \cup A)\big] \\ &= \big[(B \cap C) \cup (B \cap A)\big] \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

   Autre solution.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &\Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap (B \cup C)) \cap (C \cup A) \\ &\Leftrightarrow x \in (((A \cup B) \cap B) \cup ((A \cup B) \cap C))) \cap (C \cup A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C))) \cap (C \cup A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cup (A \cap C)) \cap (C \cup A) \\ &\Leftrightarrow x \in ((B \cup (A \cap C)) \cap C) \cup ((B \cup (A \cap C)) \cap A) \\ &\Leftrightarrow x \in ((B \cap C) \cup ((A \cap C) \cap C)) \cup ((B \cap A) \cup ((A \cap C) \cap A)) \\ &\Leftrightarrow x \in ((B \cap C) \cup (A \cap C)) \cup ((B \cap A) \cup (A \cap C)) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \end{aligned}$$

2. Montrer l'équivalence des propositions :

   a) $A \subseteq B$ b) $A \cap B = A$ c) $A \cup B = B$ d) $A \setminus B = \emptyset$

   Solution

   — $a) \Rightarrow b)$:Par double inclusion. On suppose $a)$. Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$ car $A \subseteq B$. Donc $x \in A \cap B$.

   — $b) \Rightarrow c)$: Par double inclusion. On suppose $b)$. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$. Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in B$ ou $x \in A$. Donc $x \in B$ ou $x \in A \cap B$. Donc $x \in B$.

   — $c) \Rightarrow d)$: On suppose $c)$. Soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in (A \cup B) \setminus B$. C'est impossible.

   — $d) \Rightarrow a)$: On suppose $d)$. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$ ou $x \in (A \setminus B)$. Donc $x \in B$. Donc $A \subseteq B$.

3. Montrer l'équivalence des propositions :

   a) $A \cup B = A \cap C$ b) $B \subseteq A \subseteq C$

   Solution

   — $a) \Rightarrow b)$: On suppose $a)$. $B \subseteq (A \cup B) = (A \cap C) \subseteq A \subseteq (A \cup B) = (A \cap C) \subseteq C$. En fait, on a récupéré au passage $A = (A \cup B) = (A \cap C)$.

— $b) \Rightarrow a)$: On suppose $b)$. Alors, via la question précédente, $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$. D'où l'égalité recherchée.

4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies (B = C).$$

$$((A \cup B) \subseteq (A \cup C) \text{ et } (A \cap B) \subseteq (A \cap C)) \implies (B \subseteq C).$$

Solutions

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) = (C \cap A) \cup (C \setminus A) = C.$$

$$B = ((A \cap B) \cup (B \setminus A)) \subseteq ((A \cap C) \cup ((A \cup B) \setminus A)) \subseteq ((A \cap C) \cup ((A \cup C) \setminus A)) = ((A \cap C) \cup (C \setminus A)) = C$$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ b) $g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$

c) $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, 4x-2y) \end{array}$ d) $k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{array}$

Solutions

$a)$ et $b)$ ont déjà été traités (TD 1). $h(x,y) = h(x',y') \Leftrightarrow (2x - y = 2x' - y'$ et $4x - 2y = 4x' - 2y') \Leftrightarrow 2x - y = 2x' - y' \Leftrightarrow 2(x - x') = y - y'$. On constate donc que la fonction n'est pas injective puisque $h(0,0) = h(1,2)$. De même, elle n'est pas surjective, car $(x,y) \in h(\mathbb{R}^2) \Rightarrow y = 2x$, donc $(1,1) \notin h(\mathbb{R}^2)$.
Soient x et x' deux réels différents de 1. $k(x) = k(x') \Leftrightarrow (x+1)(x'-1) = (x'+1)(x-1) \Leftrightarrow x' - x = x - x' \Leftrightarrow x' = x$. La fonction est donc injective. D'autre part, on a $1 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow 0 = 2$ donc la fonction n'est pas surjective, et donc pas bijective.

Exercice 5. Soient :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solutions

Soient n et m deux entiers. On a $2n = 2m \Leftrightarrow n = m$ donc la fonction f est injective. Cependant, l'équation $2n = 1$ n'admet pas de solution réelle, donc f n'est pas surjective.
On constate que $g(0) = g(1) = 0$ donc g n'est pas injective. De plus, pour n un entier positif, on a $g(2n) = n$ donc g est surjective. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(2n) = n$ donc $g \circ f = Id$. D'autre part, $f \circ g(1) = 2 * 0 = 0 \neq 1$ donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 6. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}[A]$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.

Solutions

$\{3,4\}; \{2,3,4\}; \emptyset$.

Exercice 7. Soit f une application de E vers F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est injective ; b) f est surjective ; c) f est bijective.

Solutions

a) $\Rightarrow$ *b*) : Supposons f injective. Alors $\text{Card}(f[E]) = \text{Card}(E)$. De plus, $f[E] \subseteq F$ et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Donc $f[E] = F$.

b) $\Rightarrow$ *c*) : Supposons f surjective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\text{Card}(E) - 1 \geq \text{Card}(E \setminus \{x, y\}) \geq \text{Card}(f(E \setminus \{x, y\})) \geq \text{Card}(F) - 1 = \text{Card}(E) - 1$. Nous avons donc partout des égalités. Par conséquent, $x = y$ et f est injective donc bijective.

c) $\Rightarrow$ *a*) : Trivial.

Exercice 8. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Solutions

1. On choisit l'image de 1, puis celle de 2 donc $n(n-1)$.
2. Il y a (au moins) deux méthodes qui fonctionnent ici. On peut procéder par récurrence, en sommant selon les valeurs possibles de $f(1)$. On peut aussi directement constater, en ordonnant tout ensemble à p éléments de I_n, que le nombre cherché est $\binom{n}{p}$.
3. Injective : $m \leq n$ car on veut $\text{Card}(I_m) = \text{Card}(f[I_m] \leq \text{Card}(I_n)$. Surjective : $m \geq n$ car on veut $\text{Card}(I_n) = \text{Card}(f[I_m] \leq \text{Card}(I_m)$. Bijective : $n = m$ en combinant les deux précédents.

Exercice 9. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Solution

On commence par ordonner les éléments de notre ensemble E (disons, pour fixer les idées, qu'on travaille avec I_n). Pour définir une bijection f, on peut définir l'image de 1 de n'importe quelle façon, ce qui laisse n choix, puis celle du second comme on le souhaite dans l'ensemble $I_n \setminus \{f(1)\}$, donc $n-1$ choix, et ainsi de suite. Au final, on a bien $n!$ choix possibles.

Exercice 10.

Soit E un ensemble, avec $\text{Card}(E) = n$. Démontrer que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,

— en utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$;

Solution

On a $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(\{I \subseteq E | \text{Card}(I) = n\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

— en raisonnant par récurrence sur n.

Solution

Pour n entier positif, on pose $P_n =$" pour tout ensemble E avec $\text{Card}(E) = n$ on a$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$".

Initialisation

P_0 est vraie car $\text{Card}(\emptyset) = 1 = 2^0$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Isolons un éléments de E, que l'on appelle x (c'est possible car $n+1 \geq 1$). On a $\mathcal{P}(E) = \{I \in \mathcal{P}(E) | x \in I\} \cup \{I \in \mathcal{P}(E) | x \notin I\} = \{I \cup \{x\} | I \in (\mathcal{P}(E \setminus \{x\})\} \cup \{I \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\}$ et ces ensembles sont disjoints, ils sont de cardinal 2^n par l'hypothèse de récurrence (car $Card(E \setminus x) = n$), on obtient alors $Card(\mathcal{P}(E \setminus \{x\})\}) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, ce qui est bien le résultat recherché.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

Solution

Soient n et m tels que $\phi(n) = \phi(m)$. Supposons que $\phi(n)$ est pair. Alors $n \leq 0$ et $m \leq 0$, donc $-2n = \phi(n) = \phi(m) = -2m$ d'où $n = m$. Le cas impair se traite de la même façon. Donc ϕ est injective. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons n pair. Alors $n = 2k = \phi(-k)$. Si n impair, $n = \frac{\phi(n)+1}{2}$. Donc surjective, donc bijective.

Exercice 12. Soient E,F deux ensembles non vides. Soient A une partie de E, B une partie de F et f une application de E dans F. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A est une partie finie de E, alors $f[A]$ est une partie finie de F.

   Solution

   Vrai. $\text{Card}(f[A]) \leq \text{Card}(A)$.

2. Si $f[A]$ est une partie finie de F, alors A est une partie finie de E.

   Solution

   Faux. La fonction nulle de $\mathbb{R}$ est un contre-exemple.

3. Si B est une partie finie de F, alors $f^{-1}[B]$ est une partie finie de E.

   Solution

   Faux. Là encore, la fonction nulle de $\mathbb{R}$ est un contre-exemple.

4. Si $f^{-1}[B]$ est une partie finie de E, alors B est une partie finie de F.

   Solution

   Faux. On peut prendre $f : x \to x^2$ et $B =]-\infty, 0]$; on a alors $f^{-1}[B] = \{0\}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'entiers $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

a) $n_1 + n_2 \leq n$, b) $n_1 + n_2 = n$.

Solution

On commence par la b). $n_1 + n_2 = n \Leftrightarrow n_2 = n - n_1$ donc il y a $n+1$ valeurs possibles pour n_1 qui chacune correspondent à une unique valeur pour n_2 d'où le nombre de couples recherché est $n+1$.

Pour la a) on constate que le nombre recherché est la somme des cardinaux obtenus pour $n_1 + n_2 = p$ avec $p \leq n$ (car deux couples valant un p différent diffèrent eux-mêmes). Le nombre recherché est donc $\sum_{p=0}^{n} p + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Mêmes questions pour les triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. Pouvez-vous généraliser aux cas des $m-$uplets ?

Indication : il est utile et instructif de représenter les couples (n_1, n_2) dans le plan $\mathbb{R}^2$ et, pour la deuxième partie, les triplets (n_1, n_2, n_3) dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Solution Commençons par la b) : $n_1 + n_2 + n_3 = n \Leftrightarrow n_1 + n_2 = n - n_3$. Il suffit donc de commencer par choisir une valeur pour n_3 ; la question précédente nous donne alors $n - n_3 + 1$ choix pour le couple (n_1, n_2). Le nombre cherché est alors $\sum_{p=0}^{n} p + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. On retrouve le nombre trouvé à la question a) et ce n'est pas surprenant : avoir $n_1 + n_2 + n_3 = n$ revient à avoir $n_1 + n_2 \leq n$ puis $n_3 = n - n_1 + n_2$. Maintenant, la a) se résout comme dans le cas des couples : le nombre cherché est

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

.

Tâchons maintenant de généraliser au cas des m-uplets : la première constatation, c'est qu'on aura toujours, en écrivant P_m^n le nombre de m-uplets répondant à la b) et Q_m^n le nombre de m-uplets répondant à la a) les relations suivantes : $P_{m+1}^n = Q_m^n$ et $Q_m^n = \sum_{j=0}^{n} P_j^n$. Cela est suffisant pour calculer tous les termes de la suite par récurrence.

Cependant, le calcul de la récurrence peut ici rebuter, donc je vais donner une autre solution pour calculer simplement les P_m^n. Considérons le mot

$$a_1 a_2 \cdots a_{n+m-1}$$

composé de $n + m - 1$ lettres, soit des 0 soit des 1. On peut y voir une représentation de la somme recherchée, où les 0 représenteraient les séparateurs entre les différents n_i. Par exemple,

$$111011001$$

serait la représentation de

$$3 + 2 + 0 + 1 = 6$$

qui est la solution (3,2,0,1) au problème $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 6$. Une solution à ce problème est donc donnée par la façon de placer les séparateurs, dit autrement de placer $m - 1$ différent 0 séparant les blocs de 1. Puisqu'il y a n lettres 1 et $m - 1$ lettres 0, il y a $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$ façons de faire cela. On retombe évidemment bien sur les valeurs trouvées pour $m = 2$ et $m = 3$.

Exercice 14. Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque, et f une application de E dans F.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Card}(f[E]) = \mathrm{Card}(E)$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Card}(f[E]) = \mathrm{Card}(F)$.

Solutions

1. Si f est injective, elle définit une bijection de E dans $f[E]$ d'où Card(E) =Card$(f[E])$. Réciproquement, si f n'est pas injective, il existe $x \neq y$ dans E avec $f(x) = f(y)$ donc Card$(f[E])$ =Card$(f[E - \{y\}]) \leq$Card$(E - \{y\}) <$Card(E).
2. Si f est surjective alors $f[E] = F$ et donc Card$(f[E])$ = Card(F). Réciproquement, si Card$(f[E])$ = Card(F), comme on a toujours $f[E] \subseteq F$ on en déduit $f[E] = F$ et donc f est surjective.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x \in f(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a Card $f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que Card $f(a) = n$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a Card $f(x) \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que les ensembles $f(x)$ et $f(y)$ aient le même nombre d'éléments.

Solutions

1. Pour tout $x \in E$, $x \in f(x)$ donc on a Card $f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que Card $f(a) = n$. Alors pour tout $x \in E, x \neq a$ on a $a \in f(x)$ et $x \in f(x)$ d'où Card $f(x) \geq 2$. Puisque $n \geq 2$ cette inégalité est vraie pour a aussi.
3. Posons g la fonction de E dans $[[1; n]]$ qui a x associe Card$(f(x))$. Si pour tout $x, y \in E$ $f(x)$ et $f(y)$ ont un nombre différent d'éléments, g est injective, et donc bijective car Card(E)=Card$([[1; n]])$. En particulier, l'hypothèse de la question 2) est vérifiée, et donc aucun x ne vérifie $g(x) = 1$, contredisant la bijectivité de g.

Exercice 16. Soit E un ensemble avec Card$(E) = n$.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subseteq B\}$.
   Indication : pour chaque $B \subseteq E$, compter les parties $A \subseteq B$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subseteq B$ équivaut à $A^c \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$.

Solutions

1. Pour chaque partie B à k éléments, il y a $\binom{k}{i}$ parties A à i éléments inclues dans B. Puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ différentes parties B à k éléments dans E, le nombre cherché est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ en utilisant la formule du binôme.
2. On a $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$, d'où le résultat annoncé.
3. Par la question 2) on est donc ramené à chercher Card$(\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A^c \subseteq B = E\})$ qui vaut, via la question 1), 3^n. (Ici on a utilisé la bijection $(A, B) \to (A^c, B)$.)

Exercice 17. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3| \,\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Solutions

1. $(x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$ donc oui ;
2. En prenant la valeur en 0 il apparaît que non ;
3. Pour tout réel x on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc oui ;
4. Pas le même domaine de définition donc non (bien qu'elles soient égales sur leur domaine commun) ;
5. La question revient à montrer que les domaines de définition sont les mêmes ; un tableau de signe nous permet alors de dire que le domaine de définition de f est donné par

$$\begin{cases} 2 - x < -\frac{1}{2}(x + 3) & \text{si } x \leq -3 \\ 2 - x < \frac{1}{2}(x + 3) & \text{si } 2 \leq x \leq -3 \\ x - 2 < \frac{1}{2}(x + 3) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 7.$$

   Donc $f = g$.
6. Pas le même domaine de définition donc non.

Exercice 18. Décrire les ensembles qui suivent.

a) $\tan[\{0\}]$

b) $\sin^{-1}[\{2\}]$

c) $\cos^{-1}[[0, 1]]$

d) $\left(\cos|_{[3,7]}\right)^{-1}[[0, 1]]$

e) $\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}[[0, 1]]$

f) $\sqrt{\cdot}\,[[0, 1]]$

g) $f^{-1}[[0, 1]]$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

h) $f^{-1}[[0, 1]]$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

i) $f^{-1}[[0, 1]]$ pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

j) $f^{-1}[[-1, 1[\cup \{2\}]$ et $f[[0, 1]^3]$ pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$

k) $|\cdot|[[-2, -1] \cup [2, 4[]$

l) $\left(|\cdot||_{[-8,7]}\right)^{-1}[[2, 3]]$

m) $|\cdot|^{-1}[\{1\}]$

n) $\exp[]-\infty, 2]]$

o) $\exp^{-1}[[-1, e]]$

p) $\ln[\mathbb{R}_-]$

q) $\ln^{-1}[[3, +\infty[]$

Exercice 19. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soient $A, B \subseteq E$. Montrer que
$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B] \quad \text{et} \quad f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B].$$
2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
3. Soient maintenant $A, B \subseteq F$. Montrer que
$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \quad \text{et} \quad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

Solutions

1. On procède par double inclusion dans le premier cas. Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc $f(x) \in f[A]$ ou $f(x) \in f[B]$ donc $f(x) \in f[A] \cup f[B]$. Réciproquement, soit $y \in f[A] \cup f[B]$. Donc $y \in f[A]$ ou $y \in f[B]$. Alors $\exists x \in A,\ y = f(x)$ ou $\exists x \in B,\ y = f(x)$ donc $\exists x \in A \cup B,\ y = f(x)$.
   Soit maintenant $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $f(x) \in f[A]$ et $f(x) \in f[B]$ donc $f(x) \in f[A] \cap f[B]$. La réciproque ne fonctionne pas ici : soit $y \in f[A] \cap f[B]$. Donc $y \in f[A]$ et $y \in f[B]$. Alors $\exists x \in A,\ y = f(x)$ et $\exists x' \in B,\ y = f(x')$ mais rien ne prouve que $x = x'$.
2. On peut prendre pour f la valeur absolue, et pour A et B les réels positifs et négatifs.
3. $(x \in f^{-1}[A \cup B]) \Leftrightarrow (f(x) \in A$ ou $f(x) \in B) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}[A]$ ou $x \in f^{-1}[B]) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B])$.
   $(x \in f^{-1}[A \cap B]) \Leftrightarrow (f(x) \in A$ et $f(x) \in B) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}[A]$ et $x \in f^{-1}[B]) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B])$.

Exercice 20. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;

b) $[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$;

c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

d) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$;

e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

f) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

g) $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;

h) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$;

i) $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

Solutions

a) $2 \notin \cos(\mathbb{R})$ et $\cos(0) = \cos(2\pi)$;

b) Bijection ; fonction réciproque : $x \mapsto \arccos(-\cos(x)) + \pi$.

c) $((x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')) \Leftrightarrow ((x-x' = y'-y)$ et $(x-x' = -y'+y)) \Leftrightarrow (x-x' = y'-y = 0)$ donc la fonction est injective. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ On a $((u, v) = (x+y, x-y)) \Leftrightarrow ((u = x+y)$ et $(v = x-y)) \Leftrightarrow ((x = \frac{u+v}{2})$ et $(y = \frac{u-v}{2}))$ donc la fonction est surjective, donc bijective.

d) Injective non surjective ;

e) $-\ln(\exp(-1) = 1 = (-1)^2$ et surjective car ln l'est ;

f) Bijective ;

g) Bijective ;

h) Soit x un réel. On considère g_x la fonction constante qui à tout réel y associe x. On voit que l'image de g_x est x donc la fonction considérée est surjective ; de plus l'image de la fonction nulle et de la fonction identité sont 0 donc pas injective.

i) Bijective.

Exercice 21. On considère l'application $f : I \to J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Trouver I et J tels que :

1. f est injective mais pas surjective ;
2. f est surjective mais pas injective ;
3. f est bijective.

Solution

1. $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$;
3. $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$.

Exercice 22. Soit E un ensemble non vide. Soient f, g et h des fonctions de E dans E. On suppose $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Solution

Puisque $f \circ h \circ g(E) \subseteq f[E]$ on récupère f surjective. De même, on a f et h injectives : soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $h \circ g \circ f(x) = h \circ g \circ f(y)$ et donc $x = y$. Le raisonnement est le même pour h. On a donc f bijective ; donc $h \circ g = f^{-1} \circ f \circ h \circ g$ est surjective. Ainsi, h est surjective elle aussi, donc bijective. Finalement, $g = g \circ f \circ h \circ h^{-1} \circ f^{-1}$ est injective, et $g = h^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ h \circ g$ est surjective, donc bijective.

Exercice 23. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Solution

C'est le théorème de Cantor. On a, si f surjective, un x tel que $f(x) = A$; mais alors si $x \in A$ la définition de A n'est pas valide. De même, si $x \notin A$, la définition de A n'est pas valide. Donc f ne peut être surjective.

Exercice 24. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subseteq F$, $f[f^{-1}[B]] = B \cap f[E]$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f[f^{-1}[B]] = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subseteq E$, $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}[f[A]] = A$.

Solutions

1. $x \in f[f^{-1}[B]] \Leftrightarrow (\exists y \in f^{-1}[B],\ x = f(y)) \Leftrightarrow (\exists y \in E,\ f(y) \in B \text{ et } f(y) = x) \Leftrightarrow (\exists y \in E,\ x \in B \text{ et } f(y) = x) \Leftrightarrow x \in (B \cap f[E])$.
2. f est surjective équivaut à $f[E] = F$ d'où, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f[f^{-1}[B]] = B$.
3. Soit $x \in A$, on a $x \in f^{-1}[f[x]]$ d'où $x \in f^{-1}[f[A]]$.
4. Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et soit $y \in f^{-1}[f[A]]$. Alors $f(y) \in f[A]$ donc $\exists x \in A | f(y) = f(x)$. Par injectivité, $y = x$ et donc $y \in A$. Via la question précédente, on a la double inclusion, d'où $f^{-1}[f[A]] = A$.

Exercice 25. Pour chacune des relations définies ci dessous, determiner si ce sont des relations d'ordre ou d'équivalence :

a) Pour m et n deux entiers relatifs, $n \equiv m$ si et seulement si 4 divise $m - n$.

b) Pour f et g deux fonctions réelles, $f \mathcal{R} g$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x)$.

c) Pour f et g deux fonctions réelles, $f \sim g$ si et seulement si il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f = h \cdot g$ et que h ait limite 1 en $+\infty$.

d) Soit E un ensemble. On définit, pour A et B deux parties de E, $A \prec B$ si et seulement si il existe une fonction injective de A dans B.

e) Soit E un ensemble. On définit, pour A et B deux parties de E, $A \bowtie B$ si et seulement $A \cap B = \emptyset$.

f) Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit, pour x et y dans E, $x \smile y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

g) (*) Soient E un ensemble et $\ll$ une relation réflexive et transitive sur ces éléments. Soit $X = \{\{y \in E, x \ll y \text{ et } y \ll x\}, x \in E\}$. On définit pour A et B deux éléments de X, $A \lll B$ si et seulement il existe a dans A et b dans B tels que $a \ll b$.

Solutions

a) $n - m = -(m - n)$ est multiple de 4 ssi $m - n$ l'est donc symétrique. Réflexif : $m - m = 4 * 0$. Transitive : Soient m, n, k tels que $m \equiv n \equiv k$. Alors $m - k = m - n + n - k$ est bien un multiple de 4. Donc relation d'équivalence.

b) La réflexivité et la symétrie sont faciles à voir. Cependant, en prenant $f : x \to x + 1;\ g : x \to x^2$ et $h : x \to x + 2$ on voit que l'on a pas la transitivié donc aucun des deux.

c) $f = \mathbf{1} f$ où $\mathbf{1} : x \to 1$ donc réflexive. De même, il est aisé de voir que $\sim$ est transitive. Cependant, en posant $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction qui vaut 1 si x est un réel positif et 0 sinon on obtient $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} * Id \sim Id$ mais l'inverse n'est pas vrai, donc pas symétrique ni antisymétrique.

d) Réflexif : en prenant la fonction identité. Transitif : la composition de deux fonction injective est injective. Symétrie : prenons $E = \mathbb{N},\ A = \{1\},\ B = \{2\}$. On a bien $A \prec B \prec A$ et $A \neq B$.

e) Pour $A \neq \emptyset$ on n'a pas $A \bowtie A$.

f) Pour tout x, $f(x) = f(x)$ donc reflexif. De même cette relation est transitive : $(f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z)$. Enfin, c'est symétrique : si $x \smile y$ alors $f(y) = f(x)$ donc $y \smile x$.

g) Puisque $\ll$ est réflexive, $\lll$ l'est aussi : soit $A \in X$, alors A est non vide (car pour tout x de E, $x \in \{y \in E, y \ll x \text{ et } x \ll y\}$). Soit alors $x \in A$; on a $x \ll x$ donc $A \lll A$. D'autre part, soient A, B, C tels que $A \lll B \lll C$. Alors il existe x_1, x_2, x_3 tels que $A = \{y \in E, y \ll x_1 \text{ et } x_1 \ll y\}$; $B = \{y \in E, y \ll x_2 \text{ et } x_2 \ll y\}$; $C = \{y \in E, y \ll x_3 \text{ et } x_3 \ll y\}$. Soient alors $a \in A$, $b, b' \in B$ et $c \in C$ tels que $a \ll b$ et $b' \ll c$. On a $x_1 \ll a \ll b \ll x_2 \ll b' \ll c \ll x_3$ donc par transitivité de $\ll$ on a $x_1 \ll x_3$ d'où $A \lll C$. Enfin, soient A et B tels que $A \lll B \lll A$. Posons x_1 et x_2 comme précédemment. Soit $b \in B$. On a alors $x_1 \ll x_2 \ll b \ll x_2 \ll x_1$ donc $b \in A$ par transitivité. D'où $B \subseteq A$. De même on a $A \subseteq B$ et donc $A = B$, donc la relation $\lll$ est une relation d'ordre.

Exercice 26. Indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de parties de E. Soit A une partie de E : $A \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A} = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E.

Pour tout $A \subseteq E$ on définie une fonction *indicatrice de* A sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$, notée $\mathbf{1}_A$, définie pour $\forall x \in E$ par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :
   (a) Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\} \subseteq E$ et $B = \{c, d\} \subseteq E$. Expliciter les fonctions $\mathbf{1}_E$, $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{\overline{A}}$, $\mathbf{1}_B$ ainsi que $\mathbf{1}_{A \cap B}$ et $\mathbf{1}_{A \cup B}$.
   (b) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$ sa fonction indicatrice sur $\mathbb{R}$. Décrire les ensembles $\mathbf{1}_A[A]$, $\mathbf{1}_A[\overline{A}]$, $\mathbf{1}_A[\mathbb{R}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{1\}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{0\}]$, $\mathbf{1}_A^{-1}[\{0; 1\}]$.
2. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :
   (a) Montrer que $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A$.
   (b) Inclusion : $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$. (Cela veut dire que pour $\forall x \in E$, on a $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$.)
   Égalité : $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
   (c) Opérations ensemblistes :

   $$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A; \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B; \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

   (d) Lien avec le cardinal : si E est de cardinal fini, $|A| = \sum_{x \in E} \mathbf{1}_A(x)$.
3. Formule du crible. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

4. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.
   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{F}$?
   (b) Soit

   $$\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F} : \ A \mapsto \mathbf{1}_A$$

   une application qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.
   (c) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et calculer son cardinal.

5. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Calculer $\sum_{A,B\subseteq E} |A\cap B|$, $\sum_{A,B\subseteq E} |A\cup B|$.

Solutions Une façon de calculer $\sum_{A,B\subseteq E} |A\cap B|$:

$$\sum_{A,B\subseteq E} |A\cap B| = \sum_{A,B\subseteq E}\sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = \sum_{x\in E}\sum_{A,B\subseteq E} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$$

$$\sum_{x\in E}\sum_{A,B\subseteq E} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = \sum_{x\in E}\sum_{\substack{A,B\subseteq E\\ x\in A\cap B}} 1 = \sum_{x\in E}\sum_{A,B\subseteq E\setminus\{x\}} 1 = \sum_{x\in E} 3^{n-1} = n3^{n-1}$$

par l'exercice 16.

Une façon de calculer $\sum_{A,B\subseteq E} |A\cup B|$:

$$\sum_{A,B\subseteq E} |A\cup B| = \sum_{A,B\subseteq E} (n - |A^c\cap B^c|) = n(2^n)^2 - n3^{n-1}$$

parce que $(2^n)^2$ est la cardinalité de $\mathcal{P}(E)^2$ et $A\mapsto A^c$ est une bijection (et aussi $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$).