Mathématiques - DS n°2

Partie CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Logique

1. (a) Est-ce que les énoncés suivants sont équivalents ?

$$P \leftrightarrow (Q \to R) \quad \text{et} \quad (P \leftrightarrow Q) \to (P \to R).$$

   (b) Est-ce que l'un des deux énoncés ci-dessus implique l'autre ?

2. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite (vue comme fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).
   (a) Exprimer en langage formel que u est monotone à partir d'un certain rang.
   (b) Donner la négation de cet énoncé.

Solution.

1. (a)

P	Q	R	$Q \to R$	$P \leftrightarrow (Q \to R)$	$P \leftrightarrow Q$	$P \to R$	$(P \leftrightarrow Q) \to (P \leftrightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

   La cinquième et la dernière colonne étant différentes, les deux énoncés ne sont pas équivalents.

   (b) La cinquième et la dernière colonne ne contient pas de couple $V\ F$. Donc $P \leftrightarrow (Q \to R)$ implique $(P \leftrightarrow Q) \to (P \leftrightarrow R)$. Par contre, elle contient des couples $F\ V$. Donc l'implication réciproque est fausse.

2. (a)

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \big[\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (N \leq m \leq n \to u(m) \leq u(n)) \vee \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (N \leq m \leq n \to u(m) \geq u(n))\big].$$

   (b)

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \big[\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (N \leq m \leq n \wedge u(m) \geq u(n)) \wedge \exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (N \leq m \leq n \wedge u(m) \leq u(n))\big].$$

Exercice 2 : Ensembles et applications

1. Pour $X \subseteq \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, et soit $f : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ l'application $g \mapsto g\restriction_{\mathbb{Q}}$ qui associe à une fonction réelle continue sa restriction à $\mathbb{Q}$. Montrer que f est injective.
2. Soient X et Y deux ensembles non-vides. Montrer qu'il existe une injection de X dans Y si et seulement s'il y a une surjection de Y sur X. (Penser aux fonctions réciproques unilatérales.)
3. Donner un exemple d'une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. (Bonus) Donner un exemple d'une injection de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
5. Conclure que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Remarque : Par contre, l'ensemble de *toutes* les fonctions réelles n'est pas équipotent avec $\mathbb{R}$.

Solution.

1. On considère deux fonction $g, h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(g) = f(h)$, c'est-à-dire $g(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Soit $r \in R$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il y a une suite rationnelle $(u_n)_n$ avec $\lim_{n\to\infty} u_n = r$. Alors par continuité

$$g(r) = g(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} g(u_n) = \lim_{n\to\infty} h(u_n) = h(\lim_{n\to\infty} u_n) = h(r).$$

   Ainsi $g = h$. Cela signifie que f est injective.

2. Soit $f : X \to Y$ une injection. Alors il y a une fonction réciproque à gauche pour f, c'est-à-dire une fonction $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Donc $g \circ f$ est surjectif, et g est surjectif.
   Réciproquement, si $g : Y \to X$ est une surjection, alors il y a une fonction réciproque à droite pour g, c'est-à-dire une fonction $f : X \to Y$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Donc $g \circ f$ est injectif, et f est injectif.

3. Pour $r \in \mathbb{R}$ on pose $g_r : x \mapsto r$. Alors $g_r \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et si $r \neq r'$ on a $g_r \neq g_{r'}$. Donc $r \mapsto g_r$ est une injection $\mathbb{R} \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$. Alors pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le réel r_g dont la
   — $3^{m+1}5^n7^k$-ième décimale est 1 si $k = E(g(m/n)) + 1 \geq 1$,
   — $2^1 3^{m+1}5^n7^k$-ième décimale est 1 si $k = -E(g(m/n)) \geq 1$,
   — $3^{m+1}5^n11^k$-ième décimale est la k-ième décimale de $g(m/n)$,
   — $2^2 3^{m+1}5^n7^k$-ième décimale est 1 si $k = E(g(-m/n)) + 1 \geq 1$,
   — $2^3 3^{m+1}5^n7^k$-ième décimale est 1 si $k = -E(g(-m/n)) \geq 1$,
   — $2^2 3^{m+1}5^n11^k$-ième décimale est la k-ième décimale de $g(-m/n)$,
   — et les autres décimales valent 0.
   Alors à partir de r_g on peut reconstituer toutes les décimales de toutes les valeurs de g. Donc $g \mapsto r_G$ est une injection de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

5. On a une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et une injection $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. D'après le théorème de Schröder-Bernstein il y a une bijection entre $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Donc ces deux ensembles sont équipotents.

Exercice 3 : Image directe, image réciproque

Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que l'application *image directe* $f[.] : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ est injective si et seulement si f est injective.
2. Montrer que l'application *image réciproque* $f^{-1}[.] : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est injective si et seulement si f est surjective.

Solution.

1. Supposons f injective, et considérons $A, A' \in \mathcal{P}(X)$ avec $f[A] = f[A']$. Puisque f est injective, $A = f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[f[A']] = A'$. Donc $f[.]$ est injective.
   Réciproquement, soit f non-injective, et $x \neq x'$ dans X avec $f(x) = f(x')$. Alors $f[\{x\}] = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f[\{x'\}]$, mais $\{x\} \neq \{x'\}$ sont dans $\mathcal{P}(X)$. Ainsi $f[.]$ n'est pas injective.
2. Soit f surjective, et $B \neq B'$ dans $\mathcal{P}(Y)$. Par symétrie on peut supposer qu'il y a $y \in B \setminus B'$. Par surjectivité il y a $x \in X$ avec $f(x) = y$. Donc $x \in f^{-1}[B]$ mais $x \notin f^{-1}[B']$, et $f^{-1}[B] \neq f^{-1}[B']$. Ainsi $f^{-1}[.]$ est injective.
   Réciproquement, soit f non-surjective, et $y \in Y \setminus \mathrm{im}\,(f)$. Alors $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset = f^{-1}[\emptyset]$, et $f^{-1}[.]$ n'est pas injective.

Exercice 4 : Corps ordonnés

1. Donner la définition qu'un corps ordonné est *archimédien*.
2. Montrer qu'un corps ordonné est archimédien si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il y a $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Solution.

1. Un corps ordonné est archimédien si pour tout $x > 0$ dans K et tout $y \in K$ il y a $n \in N$ tel que $nx \geq y$.

2. Soit K archimédien, et $\epsilon > 0$. On pose $x = 1$ et $y = \frac{1}{\epsilon}$. Alors il y a $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot 1 \geq y$, soit $n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$, soit $\frac{1}{n+1} < \epsilon$.
   Réciproquement, soit $x > 0$ et $y \in K$. Si $y \leq 0$ on pose $n = 0$; alors $nx \geq y$. Supposons donc $y > 0$. Alors $\frac{x}{y} > 0$ et il y a $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{1}{n} < \frac{x}{y}$, soit $y < nx$. Ainsi K est archimédien.

Exercice 5 : Suites

On s'intéresse à la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x.

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_{n^2}$ et $\lim_{n\to\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que $(u_n)_n$ ne converge pas.
2. Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$ et $a \leq b$, la suite extraite $(u_{n^2b^2+2an})_n$ converge vers $\frac{a}{b}$.
3. En déduire que, pour tout réel $l \in [0, 1]$, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ convergeant vers l.

Solution.

1. On a $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - E(\sqrt{n^2}) = n - n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_{n^2} = 0$. Mais $n^2 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1$, donc $n \leq \sqrt{n^2+n} < n + 1$ et $E(\sqrt{n^2+n}) = n$. Ainsi

$$u_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n},$$

   et

$$\lim_{n\to\infty} u_{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

   Ainsi $(u_n)_n$ a deux suites qui convergent vers des limites différents, et ne peut pas converger elle-même.
2. Puisque $a \leq b$ on a $n^2b^2 \leq n^2b^2 + 2an < n^2b^2 + 2bn + 1$, et donc $E(\sqrt{n^2b^2+2an}) = nb$. Ainsi

$$\begin{aligned} u_{n^2b^2+2an} &= \sqrt{n^2b^2+2an} - E(\sqrt{n^2b^2+2an}) = \sqrt{n^2b^2+2an} - nb \\ &= \frac{(\sqrt{n^2b^2+2an} - nb)(\sqrt{n^2b^2+2an} + nb)}{\sqrt{n^2b^2+2an} + nb} = \frac{n^2b^2 + 2an - n^2b^2}{\sqrt{n^2b^2+2an} + nb}, \end{aligned}$$

   et

$$\lim_{n\to\infty} u_{n^2b^2+2an} = \lim_{n\to\infty} \frac{2an}{\sqrt{n^2b^2+2an} + nb} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{\sqrt{b^2 + 2\frac{a}{n}} + b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

3. Soit $\ell \in [0, 1]$. D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il y a $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{a}{b} \in]0, 1[\cap]\ell - \frac{1}{2n}, \ell + \frac{1}{2n}[$. Puisque $\frac{a}{b} < 1$ on a $a \leq b$.
   D'après 2. il y a $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{k_n^2b^2+2ak_n} - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2n}$. Alors $|u_{k_n^2b^2+2ak_n} - \ell| \leq \frac{1}{n}$ d'après l'inégalité triangulaire, et la suite extraite $(u_{k_n^2b^2+2ak_n})_n$ converge vers ℓ.