
Mathématiques - DS n°2
Partie CUPGE
Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Logique

1. (a) Est-ce que les énoncés suivants sont équivalents ?

$$P \leftrightarrow (Q \to R) \quad \text{et} \quad (P \leftrightarrow Q) \to (P \to R).$$

   (b) Est-ce que l'un des deux énoncés ci-dessus implique l'autre ?
2. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite (vue comme fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).
   (a) Exprimer en langage formel que u est monotone à partir d'un certain rang.
   (b) Donner la négation de cet énoncé.

Exercice 2 : Ensembles et applications

1. Pour $X \subseteq \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, et soit $f : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ l'application $g \mapsto g\restriction_{\mathbb{Q}}$ qui associe à une fonction réelle continue sa réstriction à $\mathbb{Q}$. Montrer que f est injective.
2. Soient X et Y deux ensembles non-vides. Montrer qu'il existe une injection de X dans Y si et seulement s'il y a une surjection de Y sur X. (Penser aux fonctions réciproques unilatérales.)
3. Donner un exemple d'une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. (Bonus) Donner un exemple d'une injection de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
5. Conclure que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Remarque : Par contre, l'ensemble de *toutes* les fonctions réelles n'est pas équipotent avec $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Image directe, image réciproque

Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que l'application *image directe* $f[.] : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ est injective si et seulement si f est injective.
2. Montrer que l'application *image réciproque* $f^{-1}[.] : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 4 : Corps ordonnés

1. Donner la définition qu'un corps ordonné est *archimédien*.
2. Montrer qu'un corps ordonné est archimédien si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il y a $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Exercice 5 : Suites

On s'intéresse à la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x.

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_{n^2}$ et $\lim_{n\to\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que $(u_n)_n$ ne converge pas.
2. Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$ et $a \leq b$, la suite extraite $(u_{n^2b^2+2an})_n$ converge vers $\frac{a}{b}$.
3. En déduire que, pour tout réel $l \in [0, 1]$, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ convergeant vers l.