Mathématiques - DS n°1

PARTIE CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\,n!}{(2n+4)!}.$$

Solution.

1. $u_1 = \dfrac{2\cdot 0+2}{2\cdot 0+5}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$ et $u_2 = \dfrac{2\cdot 1+2}{2\cdot 1+5}\cdot\dfrac{4}{15} = \dfrac{16}{105}$.
2. Par récurrence sur n. *Initialisation.* $\dfrac{2^{2\cdot 0+3}\,(0+2)!\,0!}{(2\cdot 0+4)!} = \dfrac{2^3 2\cdot 1}{4!} = \dfrac{2}{3} = u_0$.

   Hypothèse. $u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\,n!}{(2n+4)!}$.

   Hérédité.

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n = \frac{2n+2}{2n+5}\,\frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\,n!}{(2n+4)!} = \frac{2^{2n+4}\,(n+2)!\,(n+1)!}{(2n+5)!}$$
$$\frac{2^{2n+4}\,(n+2)!\,(n+1)!\,2(n+3)}{(2n+5)!\,(2n+6)} = \frac{2^{2n+5}\,(n+3)!\,(n+1)!}{(2n+6)!} = \frac{2^{2(n+1)+3}\,((n+1)+2)!\,(n+1)!}{(2(n+1)+4)!}.$$

   Conclusion. $u_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\,n!}{(2n+4)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Évaluer la somme (où i et j parcourent des entiers dans l'intervalle donné)

$$\sum_{1\le i\le n^2}\ \sum_{\sqrt{i}\le j\le n} \frac{i}{j}.$$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$.

Solution.

$$\sum_{1\le i\le n^2}\ \sum_{\sqrt{i}\le j\le n} \frac{i}{j} = \sum_{1\le j\le n}\ \sum_{1\le i\le j^2} \frac{i}{j} = \sum_{1\le j\le n} \frac{1}{j}\ \sum_{1\le i\le j^2} i = \sum_{1\le j\le n} \frac{1}{j}\frac{j^2(j^2+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n j^3 + j$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{n\,(n+1)}{2}\Big)^2 + \frac{n\,(n+1)}{2}\Big] = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)}.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \tanh(2^k x)$.

Solution.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\tanh x \neq 0 \neq \tanh(2x)$ et $\sinh x \neq 0 \neq \sinh(2x)$ et $\cosh x > 0$, et donc
$$\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{2}{\frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)}} - \frac{1}{\frac{\sinh x}{\cosh x}} = \frac{2\cosh(2x)}{\sinh(2x)} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = 2\frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{2\sinh x \cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x}$$
$$= \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\sinh x \cosh x} - \frac{\cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\sinh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x.$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \tanh(2^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \Big[\frac{2}{\tanh(2^{k+1}x)} - \frac{1}{\tanh(2^k x)}\Big] = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)}\Big]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1}x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\tanh(2^k x)}$$
$$= \frac{2^n}{\tanh(2^n x)} - \frac{1}{\tanh(x)}.$$

Exercice 4 : On considère la fonction réelle
$$f : x \mapsto x + 2\ln(\cosh x).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f.
3. Calculer les valeurs de $f(0)$, $f(\ln 2)$ et $f(-\ln 3)$.
4. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal
5. Calculer la fonction dérivée de f.
6. Donner le tableau de variations de f.
7. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
8. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. On a $\cosh x \geq 1$ et $\operatorname{dom} \ln = \mathbb{R}_+^*$. Le domaine maximal est donc $\mathbb{R}$.
2. $f(x-) = -x + 2\ln(\cosh(-x)) = -x + 2\ln(\cosh x)$. Ainsi $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, et f est ni paire ni impaire.
3. $f(0) = 0 + 2\ln(\cosh 0) = 2\ln 1 = 0$,
   $f(\ln 2) = \ln 2 + 2\ln\frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \ln 2 + 2\ln\frac{5}{4} = \ln 2\Big(\frac{5}{4}\Big)^2 = \ln\frac{25}{8} = 2\ln 5 - 3\ln 2.$
   $f(-\ln 3) = -\ln 3 + 3\ln\frac{\frac{1}{3}+3}{2} = -\ln 3 + 2\ln\frac{10}{6} = \ln\frac{1}{3}\Big(\frac{5}{3}\Big)^2 = \ln\frac{25}{27} = 2\ln 5 - 3\ln 3.$
4. $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$, donc $\lim_{x\to\infty} \ln(\cosh x) = \infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
   $f(x) = x + 2\ln(\cosh x) = x + 2\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + 2\ln e^{-x}\frac{e^{2x}+1}{2} = x - 2x + 2\ln\frac{e^{2x}+1}{2}.$
   Ainsi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{e^{2x}+1}{2} = \ln\frac{1}{2}$.
5. $f'(x) = 1 + 2\frac{1}{\cosh x}\sinh x = 1 + 2\tanh x$.
6. $\tanh x$ est strictly croissante. Ainsi f' a un seul zéro, en x où $\tanh x = -\frac{1}{2}$. Or, $-\frac{1}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donne $e^x + e^{-x} = 2(e^{-x} - e^x)$, soit $3e^x = e^{-x}$ et $\ln 3 + x = -x$. Ainsi $x = -\frac{1}{2}\ln 3$. On a
$$f(-\frac{1}{2}\ln 3) = -\frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 3 + 2\ln\frac{4}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln\frac{16}{12}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln\frac{4}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 4 - \ln 3 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{16}{27} < 0.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln 3$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$	∞	$\searrow$	$2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\Big(-x+2\ln\dfrac{e^{2x}+1}{2}\Big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(-1+\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{e^{2x}+1}{2}\Big)=-1$, et
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-1)x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2\ln\dfrac{e^{2x}+1}{2}+x)=2\ln\dfrac{1}{2}=-2\ln 2.$
On a un asymptote affine $y=-x-2\ln 2$ en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\Big(3x+2\ln\dfrac{e^{-2x}+1}{2}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(3+\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{e^{-2x}+1}{2}\Big)=3$, et
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2\ln\dfrac{e^{-2x}+1}{2}-3x)=2\ln\dfrac{1}{2}=-2\ln 2.$
On a un asymptote affine $y=3x-2\ln 2$ en $+\infty$.

8.

