Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2026–2027

Algèbre 1 et Analyse 1

Devoir surveillé 1

LE 30 SEPTEMBRE 2026 – 1H30

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. Les calculatrices, notes de cours et objets connectés sont interdits.

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+N)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+N}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)}$.
3. Justifier l'existence et calculer la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)}$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque l'expression a un sens :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

1. Quel est le domaine de définition maximal de f ?
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. Calculer la dérivée f' de f.
4. Calculer les limites de f en $-\infty$, -1, 1 et $+\infty$.
5. Donner un tableau de variation de f et esquisser le graphe de f.

Exercice 3. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Par exemple, $S_{1,n} = n(n+1)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $S_{1,n}$, $S_{2,n}$ et $S_{3,n}$:

$$\text{(a)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\neq j}} ij, \qquad \text{(b)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\neq j}} i^2 j, \qquad \text{(c)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le 2n\\ i\le j}} ij.$$

Exercice 4.

1. Justifier l'égalité suivante (vue en cours et en TD, mais on en demande ici une justification complète) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad x^n - 1 = (x-1) \sum_{0 \leq k \leq n-1} x^k.$$

2. En déduire, pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité
$$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose pour $x \geq 0$,
$$f_n(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

   (a) Utiliser la question 2 pour prouver que, si n est pair, alors la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et si n est impair, alors la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En utilisant la question (a) ci-dessus, trouver P_3 un polynôme de degré 3 et $a \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \geq 0, \qquad P_3(x) + ax^4 \leq \ln(1+x) \leq P_3(x).$$

   (c) En déduire une approximation de $\ln 2$.

   (d) Calculer la limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x - x^2/2 + x^3/3}.$$