Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2026–2027

Algèbre 1 et Analyse 1

Correction du Devoir surveillé 1 du 30 septembre 2026

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. Les calculatrices, notes de cours et objets connectés sont interdits.

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+N)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+N}$.

Si l'égalité est vraie, alors en multipliant par k les deux membres, on trouve

$$\frac{1}{(k+N)} = a + \frac{bk}{k+N}. \tag{1}$$

En évaluant (**??**) en $k = 0$, on trouve $a = 1/N$. En prenant la limite $k \to +\infty$ dans (**??**), on trouve $0 = a + b$. Donc nécessairement $(a, b) = (1/N, -1/N)$.

Réciproquement, en remplaçant a par $1/N$ et b par $-1/N$ dans le membre de droite de l'énoncé, et en réduisant au même dénominateur, on trouve le membre de gauche de l'énoncé.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)}$.

On utilise la question 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+N}\right).$$

On effectue un changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+N} = \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k},$$

puis on observe qu'on a une somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k}.$$

3. Justifier l'existence et calculer la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+N)}$.

On utilise la question 2. Le nombre réel $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est indépendant de n. La somme $(1/N)\sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k}$ est une somme de $(n+N)-(n+1)+1 = N$ termes, chacun tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc la limite existe et vaut $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque l'expression a un sens :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

1. Quel est le domaine de définition maximal de f ?

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition maximal de $g : x \to \frac{2x}{1-x^2}$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Donc le domaine maximal de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?

Pour $x \in \setminus\{-1, 1\}$, on calcule :

$$f(-x) = \arctan(g(-x)),$$

et g est impaire donc

$$f(-x) = \arctan(-g(x)),$$

et enfin arctan est impaire, donc

$$f(-x) = -\arctan(g(x)) = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

3. Calculer la dérivée f' de f.

Par le théorème de dérivation des fonctions composées : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f'(x) = \arctan'(g(x)) \cdot g'(x).$$

On calcule :

$$g'(x) = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Donc

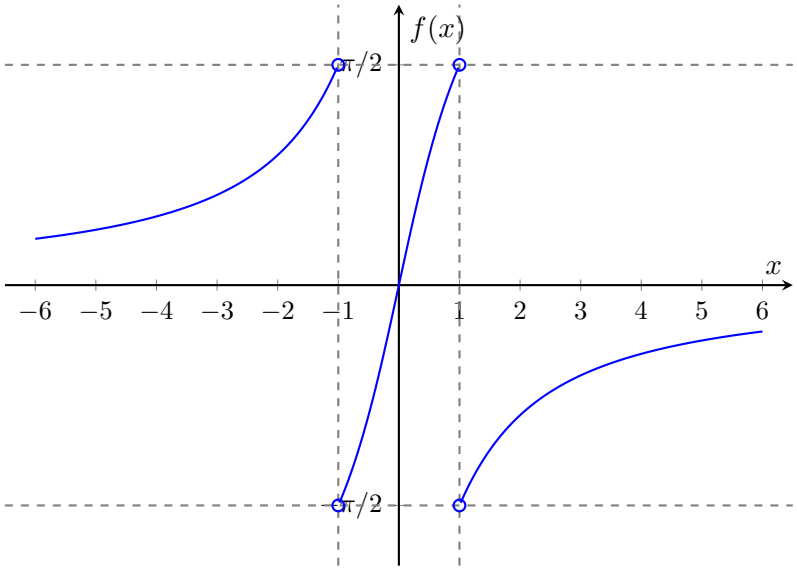
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+g(x)^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(Cela implique que f coincide avec $2\arctan$, mais seulement sur $]-1, 1[$: pourquoi ?)

4. Calculer les limites de f en $-\infty$, -1, 1 et $+\infty$.

Quand $x \to \pm\infty$, on a $g(x) \to 0$, donc $f(x) \to 0$, car $\arctan(0) = 0$. Quand $x \to -1$ par valeurs inférieures, $g(x) \to +\infty$, donc $f(x) \to \pi/2$. Quand $x \to -1$ par valeurs supérieures, $g(x) \to -\infty$, donc $f(x) \to -\pi/2$. Quand $x \to 1$ par la gauche (par valeurs inférieures), $g(x) \to +\infty$, donc $f(x) \to +\pi/2$. Quand $x \to 1$ par la droite (par valeurs supérieures), $g(x) \to -\infty$, donc $f(x) \to -\pi/2$.

5. Donner un tableau de variation de f et esquisser le graphe de f.



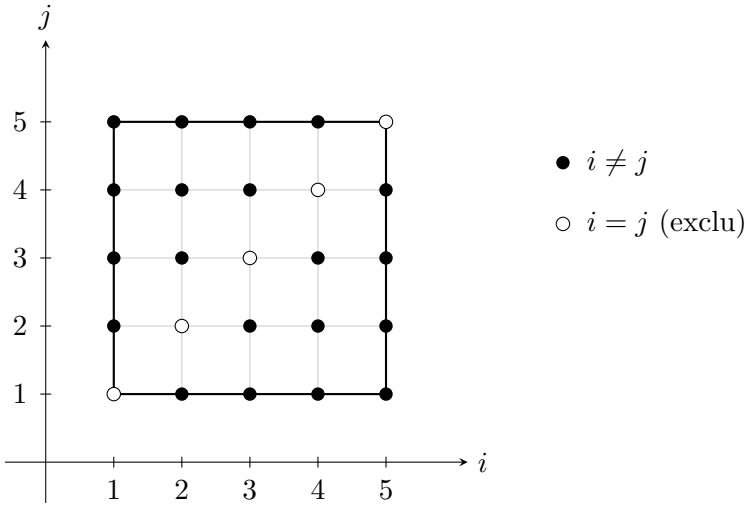
Exercice 3. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Par exemple, $S_{1,n} = n(n+1)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $S_{1,n}$, $S_{2,n}$ et $S_{3,n}$:

$$\text{(a)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\neq j}} ij, \qquad \text{(b)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\neq j}} i^2 j, \qquad \text{(c)} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le 2n\\ i\le j}} ij.$$

(a) Voici le domaine de sommation dans le plan $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dans le cas $n = 5$:



Ici i et j jouent des rôles symétriques. On va d'abord fixer i et sommer en j. Cela revient à parcourir le domaine de sommation suivant des segments verticaux. On a ainsi, en notant M_a la somme à calculer :

$$M_a = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\neq j}} ij = \sum_{1\le i\le n} \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq i}} ij,$$

et on se concentre sur la deuxième somme :

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} ij = i\left(-i+\sum_{j=1}^{n} j\right). \tag{2}$$

Dans la parenthèse ci-dessus, on a un terme $-i$ et un terme $+i$ qui vient de la somme, et ces deux termes se compensent, si bien qu'on a une somme des j de 1 à n sans le terme i, ce qu'on voulait. On a donc

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} ij = i\left(-i+\frac{n(n+1)}{2}\right). \tag{3}$$

On somme maintenant en i :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} ij &= \sum_{1\leq i\leq n}\left(i\left(-i+\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)\\ &= -\sum_{1\leq i\leq n} i^2 + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\sum_{1\leq i\leq n} i\end{aligned},$$

et donc

$$M_a = -S_{2,n} + S_{1,n}^2.$$

(b) On note M_b la somme à calculer :

$$M_b = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n\\ i\neq j}} i^2 j.$$

On reprend (**??**) et (**??**), et on obtient :

$$M_b = \sum_{1\leq i\leq n} i^2\left(-i+\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

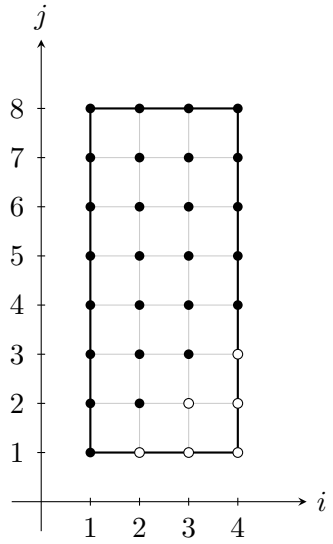
et donc

$$M_b = -S_{3,n} + S_{1,n}S_{2,n}.$$

(c) On note M_c la somme à calculer :

$$M_c = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq 2n\\ i\leq j}} ij.$$

Voici un dessin du domaine de sommation dans le cas $n = 4$:



- $\bullet$ $i \leq j$
- $\circ$ $i > j$ (exclu)

Le domaine de sommation n'est pas symétrique en (i,j). On va sommer suivant des segments horizontaux : d'abord en j dans $[1,2n]$, puis on distingue deux cas pour la somme en i : (1) si $j \leq n$, alors on somme en i de 1 à j, (2) si $j > n$, alors on somme en i de 1 à n. Cela donne

$$M_c = \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{1\leq i\leq j} ij + \sum_{n+1\leq j\leq 2n} \sum_{1\leq i\leq n} ij.$$

On note $M_{1,c}$ la première somme ci-dessus, et $M_{2,c}$ la deuxième. On calcule :

$$\begin{aligned} M_{1,c} = \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{1\leq i\leq j} ij &= \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{1\leq i\leq j} i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{j(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

En développant, on a donc

$$M_{1,c} = \frac{1}{2}\left(S_{3,n} + S_{2,n}\right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} M_{2,c} = \sum_{n+1\leq j\leq 2n} \sum_{1\leq i\leq n} ij &= \sum_{j=n+1}^{2n} \left(j \sum_{1\leq i\leq n} i \right) \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} j \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$M_{2,c} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=n+1}^{2n} j = \frac{n(n+1)}{2} \left(\sum_{j=1}^{2n} j - \sum_{j=1}^{n} j \right),$$

et donc

$$M_{2,c} = S_{1,n}(S_{1,2n} - S_{1,n}).$$

Finalement

$$M_c = \frac{1}{2}\left(S_{3,n} + S_{2,n}\right) + S_{1,n}(S_{1,2n} - S_{1,n}).$$

Exercice 4.

1. Justifier l'égalité suivante (vue en cours et en TD, mais on en demande ici une justification complète) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad x^n - 1 = (x-1) \sum_{0\leq k\leq n-1} x^k.$$

On peut voir le membre de droite comme une somme téléscopique : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(x-1) \sum_{0\leq k\leq n-1} x^k = x \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

et il ne reste plus que le dernier terme dans la première somme et le premier terme dans la deuxième somme, si bien que

$$(x-1) \sum_{0\leq k\leq n-1} x^k = x^n - 1.$$

---

2. En déduire, pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

On commence par changer x en $-x$ dans la première question, pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (x+1) \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = 1 - (-x)^n.$$

Ensuite on divise par $x+1$ pour $x \neq -1$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Il ne reste plus qu'à écrire $(-x)^k = (-1)^k x^k$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

---

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose pour $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

(a) Utiliser la question 2 pour prouver que, si n est pair, alors la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et si n est impair, alors la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout n, la fonction f_n est dérivable, et pour tout $x \geq 0$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k x^{k-1}}{k} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^{k-1}.$$

On observe que $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k.$$

Par la question 2, on a donc

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n x^n}{1+x},$$

et donc, pour $x \geq 0$, on a f_n' positive si n est pair, et donc f_n croissante sur $\mathbb{R}_+$, et f_n' négative si n est impair, et donc f_n décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant la question (a) ci-dessus, trouver P_3 un polynôme de degré 3 et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \geq 0, \qquad P_3(x) + ax^4 \leq \ln(1+x) \leq P_3(x).$$

Comme f_3 est décroissante et $f_3(0) = 0$, on a $f_3 \leq 0$ dans $\mathbb{R}_+$. Cela s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On pose donc

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

et on a obtenu

$$\ln(1+x) \leq P_3(x),$$

pour $x \geq 0$. Comme f_4 est croissante et et $f_4(0) = 0$, on a $f_4 \geq 0$ dans $\mathbb{R}_+$. Cela s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \ln(1+x).$$

Donc en posant $a = -1/4$,

$$P_3(x) + ax^4 \leq \ln(1+x),$$

pour $x \geq 0$.

(c) En déduire une approximation de $\ln 2$.

En remplaçant x par 1 dans l'encadrement de la question précédente, on obtient

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \leq \ln(2) \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

c'est-à-dire

$$\frac{7}{12} \simeq 0.58 \leq \ln(2) \simeq 0.69 \leq \frac{5}{6} \simeq 0.83.$$

(d) Calculer la limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x - x^2/2 + x^3/3}.$$

On reprend l'inégalité de la question (b) : pour $x \geq 0$,

$$\frac{P_3(x) - ax^4}{P_3(x)} \leq \frac{\ln(1+x)}{P_3(x)} \leq 1.$$

Dans la limite $x \to 0$, le terme ax^4 est négligeable devant $P_3(x)$. Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{P_3(x) - ax^4}{P_3(x)} = 1.$$

Finalement, par encadrement,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x - x^2/2 + x^3/3} = 1.$$