Feuille 2 : Sommes et produits

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes téléscopiques

1. *Calculer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$.

2. a) *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

   b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

3. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 2 – Manipulations de sommes

1. *Montrer par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer les sommes suivantes (on pourra utiliser la question précédente si nécessaire).*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(2k-7)^2}{3}$

3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (i+j) \right) = n(n+1)^2$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(ij) = 2n\ln(n!)$.

Exercice 3 – Sommes géométriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer les sommes suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{5^k}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 7^{n-k}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^{5-k}$ *e)* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$

Exercice 4 – Binôme de Newton et coefficient binomial

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *développer* $(x+2)^5$ *et* $(1-x)^9$.

2. *En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

3. a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $p \in \{1, \ldots, n\}$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.

   b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

Exercice 5 – Produits

Soit $n \geq 2$ *un entier et* p *et* q *deux entiers naturels tels que* $q \geq p$. *Calculer les produits suivants :*

1) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ *2)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ *3)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5k\sqrt{k}$ *4)* $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$

5) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ *6)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ *7)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Sommes et produits téléscopiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ *2)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ *3)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

Exercice 7 – Quand on a un troisième terme

1. *Expliciter deux constantes réelles a et b telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :*
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$
2. *Soit $n \geq 2$ un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.*

Exercice 8 – Sommes doubles et maximum

1. *Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $Max(i,j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée ?*
2. *En déduire que*
$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) \right) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)k.$$
3. *En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée dans l'Exercice 2, en déduire que :*
$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Simples téléscopages

Soit $n \geq 4$ un entier. Calculer $3\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+4)}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} (k+1)^7 - k^7$.

Exercice 10 – Sommes arithmétiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 7k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2k+1)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}$.

Exercice 11 – Sommes géométriques

Soit $n \geq 3$ un entier, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 5^k$, $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k 4^{n-k}$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i} 2^j$.

Exercice 12 – Binôme de Newton

Développer $(-2x+1)^5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} \binom{n}{k}$ *ainsi que* $2^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \binom{n}{k}$.