

G groupe d'ordre $12 = 2^2 \times 3$

$$1. n_2? \quad n_2 | 3 \text{ et } n_2 \equiv 1 \pmod{2} \\ \Rightarrow n_2 = 1 \text{ ou } 3$$

$$n_3? \quad n_3 | 4 \text{ et } n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ \Rightarrow n_3 = 1 \text{ ou } 4$$

$$2. G \text{ abélien si } n_2 = n_3 = 1$$

$\Rightarrow$ tous les sous-groupes de G sont distingués
donc il y a un unique 2-Sylow $\Rightarrow n_2 = 1$
— 3-Sylow $\Rightarrow n_3 = 1$

$\Leftarrow$ $n_2 = n_3 = 1$: Noton P_2 l'unique 2-Sylow
 P_3 — 3-Sylow

$$\text{on a } P_2 \triangleleft G, P_3 \triangleleft G$$

$$\text{or } P_2 \cap P_3 = \{e\} \text{ or } G = P_2 P_3 \text{ d'où } G = P_2 \times P_3$$

mais $|P_3| = 3$ donc il est cyclique donc abélien

$$|P_2| = 2^2 \text{ donc il est abélien}$$

donc G est abélien

Ex 1 G abélien : on compte les éléments suivant
leur ordre : ordre 1 : 1, ordre 3 : 2

ordre 2 ou 4: 3 $\rightarrow$ 6 els donc 6 6 els

restant sont d'ordre 6 ou 12.

2.2. Si G contient un élément d'ordre 12: $G \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
Si non G contient un élément d'ordre 6
or $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3. G non abélien

Supposons $n_3 \neq 1$. Montrer $n_2 = 1$

Si $n_3 \neq 1$ alors $n_3 = 4$ et il y a $4 \times 2 = 8$
éléments d'ordre 3 et donc il y a au plus 3
els d'ordre 2 ou 4. Chaque 2-Sylow possède
3 els d'ordre 2 ou 4 donc il y a au plus 1 seul
2-Sylow donc $n_2 = 1$.

4. $n_3 = 4$: G agit sur les 3-Sylow par conj.

$$E = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \quad \text{3-Sylow}$$

$$G \curvearrowright E: \quad g \cdot Q = g Q g^{-1}$$

Th: action est transitive
(Sylow)

4.1 $Q \in \mathcal{E}$, on montre que

$$\text{Stab}_Q = Q$$

En fait, soit $x \in Q$, $x \cdot Q = xQx^{-1} = Q$

donc on a $Q \subseteq \text{Stab}_Q$.

$$\text{Mais } |\text{Stab}_Q| = \frac{|G|}{\text{Card}(\Omega_Q)} = \frac{12}{4} = 3$$

$\rightarrow$ action transitive

donc $Q = \text{Stab}_Q$.

4.2 On a $\text{moyen de l'action} = \bigcap_{Q \in \mathcal{E}} \text{Stab}_Q$

$$= \bigcap_{Q \in \mathcal{E}} Q = \{e\}$$

(Q et Q' deux 3-sylow
avec $Q \neq Q' \Rightarrow Q \cap Q' = \{e\}$)

donc l'action est fidèle.

$$\text{On considère } G \xrightarrow{\phi} S_4$$
$$g \mapsto \pi_g$$

$$\text{avec } g \cdot Q_i = Q_{\pi_g(i)}$$

C'est un morphisme de groupe injectif

donc $G \cong \text{Im } \phi \leq S_4$

mais $|G| = 12$ et le seul sous-groupe
d'ordre 12 dans S_4 est A_4 .

donc $G \cong A_4$.

5. On suppose $n_3 = 1$ donc $n_2 = 3$ (G non
abélien)

Alors P_3 est distingué. Soit Q un 2-Sylow

alors $P_3 \cap Q = \{e\}$ et $G = P_3 Q$

d'où $G = P_3 \rtimes Q$

$$\left[G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right. \\ \left. \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \right]$$