

1. G groupe fini, $H \leq G$ d'indice 2
 $\text{card}(G/H) = 2$

Montrer $H \triangleleft G$: $\forall g \in G$, $gHg^{-1} = H$
c'est-à-dire $gH = Hg$

• Soit $g \in G$: on considère deux cas :

.. $g \in H$ alors $gH = H$ et $Hg = H$

et on a bien $gH = Hg$

.. $g \notin H$ alors $G/H = \{H, gH\}$ car $gH \neq H$

donc $gH = G \setminus H$

et de même $H/G = \{H, Hg\}$ et

$Hg = G \setminus H = gH$

Application : $A_n \triangleleft S_n$
ordre $n!/2$ $\hookrightarrow$ ordre $n!$

2. G fini, p plus petit nombre divisant $|G|$
et $H \leq G$ d'indice p . On montre $H \triangleleft G$

On fait agir G sur G/H par
 $g \in G, C \in G/H : g \cdot C = gC = \{gc \text{ avec } c \in C\}$

2.1 l'action est transitive :

Soient $C_1, C_2 \in G/H$, il faut trouver $g \in G$
tel que $g \cdot C_1 = C_2$. On écrit $C_1 = g_1 H$
et $C_2 = g_2 H$ avec $g_1, g_2 \in G$.

Et alors $g \cdot C_1 = gg_1 H$. On prend

$$g = g_2 g_1^{-1}, \text{ on a } g \cdot C_1 = g_2 g_1^{-1} g_1 H \\ = g_2 H = C_2$$

2.2 K noyau de l'action. Montrer $K \subseteq H$

Soit $x \in K$, on a $\forall C \in G/H, x \cdot C = C$

On prend $C = H$, on a $xH = H$

et donc $x \in H$. D'où on a bien $K \subseteq H$

2.3 Montrer G/K est à un sous-groupe
de S_p

On numérote les classes de $G/H : C_1, \dots, C_p$

Pour $g \in G$, on pose $\pi_g \in S_p$
défini par $g \cdot C_i = C_{\pi_g(i)} \quad \forall i$

On obtient $G \xrightarrow{\phi} S_p$ morphisme
 $g \mapsto \pi_g$

de noyau K donc $G/K \cong \text{Im}(\phi) \leq S_p$

2.4. On sait $K \leq H \leq G$

Supposons que $K \neq H$ donc l'indice de
 K dans H , disons h , est $\neq 1$.

$$(H:K) = [H:K] = \frac{|H|}{|K|}$$

On considère $\text{Im} \phi \leq S_p$
l'ordre de $|\text{Im} \phi|$ est $|G|/|K|$ d'où $|S_p| = p!$
 $|S| = p! = 1 \times 2 \times \dots \times p$ d'où $(G/K) = p$

car $K \neq G$ (action est transitive donc
non triviale)

et p est le plus petit
nombre premier divisant $|G|$

$$\text{don't } \frac{|G|}{|K|} = p = \frac{|G|}{|H|} \quad \text{don't } |K| = |H|$$

$$\text{don't } K = H$$

$$\underline{\text{Th}}: K \triangleleft G \quad \text{don't } H \triangleleft G.$$