

Exo. $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$ pour $y \geq 0$.

1. Montrer F continue sur $\mathbb{R}$

① Riemann = Lebesgue : fonction continue sur intervalle non compact

$\leadsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx < +\infty$

par exemple $e^{-x^2 y} \leq 1, \leadsto \int_0^{+\infty} 1 dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

② $y \mapsto \underbrace{\int_{(0,+\infty)} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx}_{f(x,y)} \text{ continue ?}$

②.1 $\forall y \geq 0, x \mapsto f(x,y)$ mesurable : oui car continue

②.2 $\forall x \in [0, +\infty[, y \mapsto f(x,y)$ continue : clair

(2.3) g intégrable sur $[0; +\infty[$ avec
 $\forall x, y \quad |f(x, y)| \leq g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

donc F est continue

2. $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{[0; +\infty[} f(x, y) dx$$

convergence dominée

$$= \int_{[0; +\infty[} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) dx$$

et $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ p.p.

donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0.$

3. F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: appliquer le th.

4. $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

On a $F'(y) = \int_{[0; +\infty[} \frac{x^2 e^{-x^2 y}}{1+x^2} dx$

$\swarrow$ $(1+x^2) - 1$

$$= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx + F(y)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{y}} I + F(y)$$

$\nearrow$ chgr de variable