

Exo $f(x) = \frac{\sinh(x)}{e^{x-1}}$ pour $x \geq 0$

(1) Montrer f intégrable sur $[0; +\infty[$

$$f \text{ est intégrable sur } [0; +\infty[\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

$$\left(\text{et dans ce cas } \int_{[0; +\infty[} f dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx \right)$$

On a $|\sinh(x)| \leq x$ et $e^{x-1} \geq x$ pour tout $x \geq 0$

et $e^{x-1} \geq e^{x-1}$ pour $x > 2$

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sinh(x)}{e^{x-1}} \right| dx = \int_0^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots$$

$$\leq \int_0^2 \frac{x}{e^{x-1}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} dx$$

$$\leq \int_0^2 dx + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{e^{x-1}} < +\infty$$

$\parallel$ $\ll$
 2 e^{-1}

2. $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-nx} \sin(x)$ et pour $x=0$?

Pour $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$ d'où $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x(1 - e^{-x})}$

$$= \frac{1}{e^x} \sum_{n \geq 0} (e^{-x})^n = \sum_{n \geq 0} e^{-xn-x} = \sum_{n \geq 1} e^{-nx}$$

$$\text{d'où } f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-nx} \cdot \sin(x)$$

Pour $x=0$, la série vaut 0 mais $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{e^x} = 1$

3. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx$

On pose $f_n(x) = e^{-nx} \cdot \sin(x)$ pour $n \geq 1$

$$\text{On a } \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \sum_n f_n(x)$$

• f_n intégrable
(par Riemann)

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \int |f_n| < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |f_n| \leq \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$$

IPP

$$1/n^2$$

$$\int_0^{+\infty} |f_n| \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$$

Lebesgue

$$\text{On a } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

(pas de convergence en 0)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx$$

$$\text{On calcule } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x) dx$$

IPP + IPP
→ ...

$$\text{On a } \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x) dx = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{x(i-n)} dx \right)$$

$$= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{i-n} e^{x(i-n)} dx \right)$$

$$\therefore = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{n-i} \right) = \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{dr on} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$$