

$$f: [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin(x)^2 & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer f borélienne

(Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues donc boréliennes. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, le
 $\hookrightarrow \mathbb{Q}$ est borélien
fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ est borélienne

donc $f(x) = \sin(x) \chi_{\mathbb{Q}}(\cos(x)) + \sin(x)^2 (1 - \chi_{\mathbb{Q}}(\cos(x)))$
est borélienne.

Donc $|f|$ possède une intégrale

$$\text{or } \int_{[0; \pi/2]} |f| \leq \int_{[0; \pi/2]} 1 = \pi/2$$

donc f est intégrable.

2. Calculer $\int f \, dx$

On pose $g(x) = \sin(x)^2 \quad g: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

alors $f = g$ p.p. puisque $f(x) \neq g(x)$

si $\cos(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \cos^{-1}(\mathbb{Q})$

mais pour $q \in \mathbb{Q}$, $\cos^{-1}(q)$ est apd

donc $\cos^{-1}(\mathbb{Q})$ est dénombrable

et ainsi $\int_{(0; \pi/2)} f = \int_{(0; \pi/2)} \sin(x)^2$ donc négligeable

$$\int_{(0; \pi/2)} \sin(x)^2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \, dx \xrightarrow{\text{à faire}} \dots = \frac{\pi}{4}$$

Car $\sin(x)^2$
est continue
sur $[0; \pi/2]$ compact