

$(X, \mathcal{E}, \mu)$ mesurée $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -intégrable
i.e. $\int |f| < +\infty$

1. Montrer que f est finie μ -pp.

On pose $A = \{x \in X \mid |f(x)| = +\infty\}$

On doit montrer que $\mu(A) = 0$.

On a $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ où $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$

① $A_n \searrow$ ② A_n mesurable

③ $\chi_{A_n} \leq |f|$ donc $\mu(A_n) \leq \int |f| < +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

On calcule $\mu(A_n)$:

Pour tout $n \geq 1$, on a n. $\chi_{A_n} \leq |f|$ ③

En effet, soit $x \in X$: • $x \notin A_n : \chi_{A_n}(x) = 0 \checkmark$

• $x \in A_n$ donc $n \chi_{A_n}(x) = n$ mais aussi $|f(x)| \geq n$
donc $n \chi_{A_n}(x) \leq |f(x)|$

Donc on déduit de * $n \int \chi_{A_n} \leq \int |f|$
 $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int |f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Conclusion : f est finie presque partout

2. Supposons $\int |f| = 0$. Montrer que $f = 0$ pp.

On pose $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

On doit montrer $\mu(A) = 0$.

On écrit $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ avec $A_n = \{x \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$

• A_n mesurable • $A_n \nearrow$

donc $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

et on majoré comme ci-dessus $|f| \geq \frac{1}{n} \chi_{A_n}$

donc $\mu(A_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$ donc $\mu(A) = 0$.