

Racine carrée et décomposition polar

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$$

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne et définie positive

A normale : $AA^* = AA = A^*A$ ($A^* = A$)

$\hookrightarrow$ th. spectral : il existe U unitaire et D diag.

avec $A = UDU^*$ ($U^* = U^{-1}$)

Et puisque A définie positive $\Rightarrow$ vp de A sont > 0

d'où $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ avec $d_i > 0 \forall i$

On a $\langle x, Ax \rangle \stackrel{\text{faire les détails}}{=} \langle x, Dx \rangle = (x_1, \dots, x_n) D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= \sum_{i=1}^n d_i |x_i|^2 > 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

On pose $H = U\sqrt{D}U^*$ où $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$

H est définie positive, hermitienne $\nwarrow$ faire le calcul

et $H^2 = U\sqrt{D}U^*U\sqrt{D}U^* = UDU^* = A$

H la racine carrée positive de A

2. Décomposition polaire

$$n \in GL_n(\mathbb{C})$$

2.1 $\forall n \quad n^* n$ est hermitienne, définie ps.

• $(n^* n)^* = n^* n^{**} = n^* n$ donc hermitienne

• On veut $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle x, n^* n x \rangle \geq 0$

$$\text{et } = 0 \text{ ssi } x = 0$$

$\forall n) \quad \underbrace{\langle x, n^* n x \rangle}_{\substack{\text{r} \\ \text{r}}} = \langle n x, n x \rangle = \|n x\|^2$
(n lin.) donc on a

bien $\forall x \in \mathbb{C}^n, \geq 0$ et $= 0$ ssi $x = 0$

2.2. On pose $U = H^{-1} n$ où H racine

carrée pos. de ~~$n^* n$~~

Montrer U unitaire; c'est-à-dire $U^* = U^{-1} \underbrace{(n n^*)}_{\text{r}}$

$$U^* = (H^{-1} \Pi)^* = \Pi^* (H^*)^{-1} = \Pi^* H^{-1}$$

On a $H^2 = \Pi \cdot \Pi^*$ d'où $\Pi^* = \Pi^{-1} H^2$

On remplace $U^* = \Pi^{-1} H^2 H^{-1} = \Pi^{-1} H$
 $= (H^{-1} \Pi)^{-1}$

donc U est unitaire $\swarrow$ inv.

2.3. On a $\Pi = H U \swarrow$ unitaire (unité à faire)
 $\nearrow$ herm. définie pos.