

Exo.

① $A \in M_n(\mathbb{R})$

On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ $T = \frac{1}{2}(A - A^t)$

On a $S + T = A$ et $S^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = S$
symétrique

et $T^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -T$ anti-symétrique

Supposons qu'il existe S' symétrique et T' anti-sg...

avec $A = S' + T'$. Donc $S + T = S' + T'$

on envoie $\underbrace{S - S'}_{\text{sgn.}} = \underbrace{T' - T}_{\text{anti-sg.}} \Rightarrow S - S' = T' - T = 0$
donc $S = S'$
 $T = T'$

e. $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle =$ plus grande valeur propre de S

On a $A = S + T$ d'où $\langle x, Ax \rangle = \langle x, Sx \rangle + \langle x, Tx \rangle$

et $\langle x, Tx \rangle = \langle T^t x, x \rangle = -\langle Tx, x \rangle$
 $= -\langle x, Tx \rangle$

$$\text{donc } \langle x, Tx \rangle = 0$$

$$\text{d'où } \langle x, Ax \rangle = \langle x, Sx \rangle$$

Par le théorème spectral, il existe D diagonale,
 P matrice ortho. tels que $S = PDP^{-1}$ à cause
 or alors $\langle x, Sx \rangle = \langle x, PDP^{-1}x \rangle \stackrel{!}{=} \langle x, Dx \rangle$

Note $\langle Px, Py \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\hookrightarrow \langle P^t Px, y \rangle = \langle P^{-1}Px, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\text{d'où } \langle x, Sx \rangle = \langle x, Dx \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ valeurs propres de } S$$

$$\text{Il reste à montrer } \max_{\|x\|=1} (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) = \lambda$$

$$\text{où } \lambda = \max \lambda_i$$

$$\text{Soit } x \in E, \text{ on a } \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda (x_1^2 + \dots + x_n^2) \\ \leq \lambda \|x\|^2$$

$$\text{d'où } \max_{\|x\|=1} (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) \leq \lambda$$

Supposons que $\lambda = d_i$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$, on prend

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \text{alors } \|x\| = 1 \text{ et } d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2 = d$$

donc on a $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle = d$

3. Maximiser $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$
avec les contraintes $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$ et $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$

On pose $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$. On veut $\|x\| = 1$

et $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 = \langle x, Ax \rangle$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse: plus grande valeur propre de la matrice symétrique de A

$$\frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

poly. caract. $T^4 - T^2 = T^2(T^2 - 1)$
 $= T^2(T-1)(T+1)$ vp. 0, 1, -1

réponse : ①