

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

$$E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \text{produit scalaire}$$

$$F = \{ x \mapsto ax + b \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \} \text{ s.v. de } E$$

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \inf_{f \in F} \|x^2 - f\|^2$$

$$= \|x^2 - f_0\|^2 \quad \text{où } f_0 \text{ est la proj. ortho. de } x^2 \text{ sur } F$$

On calcule une base de F

On peut de C.B. $(1, x)$ de F puis on applique G.S.

• $f_1 = a_1 = 1$

$$\|f_1\|^2 = \int_0^1 1^2 dx = 1, \quad e_1 = 1$$

$$\bullet f_2 = a_2 - \frac{\langle f_1, a_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 \quad \|f_1\|^2 = 1, f_1 = 1$$

$$\langle f_1, a_2 \rangle = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad f_2 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \dots \quad e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Thus f_0 = proj^t orth. of x^2 on F

$$f_0 = \langle x^2, e_1 \rangle e_1 + \langle x^2, e_2 \rangle e_2 = x - \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 x^2 dx \dots \quad \int_0^1 2\sqrt{3} x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \dots$$

Conclusion: $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$
 $= \frac{1}{180}$