

Ex. $(e_1, \dots, e_n)$ famille de vecteurs de E (endométr.)
 or $n = \dim E$

avec $\|e_i\| = 1$

Montrer que :

$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \Leftrightarrow (e_1, \dots, e_n)$ bon

$\boxed{\Leftarrow}$ $(e_1, \dots, e_n)$ bon

On écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$= 1 \text{ si } i=j$$

0 sinon

$$= \sum_i x_i^2 \langle e_i, e_i \rangle = \sum_i x_i^2 \|e_i\|^2 = \sum_i x_i^2$$

$$= \sum_i x_i^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2 \leftarrow$$

D'un autre côté $\langle x, e_i \rangle = \sum_j x_j \langle e_j, e_i \rangle$

$$= x_i$$

$$\boxed{\Rightarrow} \forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

• $(e_1, \dots, e_n)$ or orthogonale

$$\forall i \quad \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle^2$$

$$1 = \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle^2}_1 + \sum_{j \neq i} \langle e_i, e_j \rangle^2$$

$$\text{d'où } \sum_{j \neq i} \langle e_i, e_j \rangle^2 = 0 \Rightarrow \forall j \neq i, \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

• $(e_1, \dots, e_n)$ base

Remark: $(a_1, \dots, a_s)$ vecteurs non nuls et ortho.
deux à deux

Alors la famille est libre.

Preuve: On regarde une relation $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = 0$

Pour $i \in \{1, \dots, s\}$, on regarde le produit scalaire avec a_i

$$\langle \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s, a_i \rangle = 0$$

$$= \sum_{j=1}^s \lambda_j \langle a_j, a_i \rangle = \lambda_i \|a_i\|^2$$

puisque $\|a_i\|^2 \neq 0$
donc $\lambda_i = 0$

