

CS $\Rightarrow$ inégalité triang.

(cas réel)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

$$\stackrel{\text{CS}}{\leq} \|x\|^2 + \underbrace{2\|x\| \cdot \|y\|}_{(\|x\| + \|y\|)^2} + \|y\|^2$$

Cauchy-Schwarz (réel)

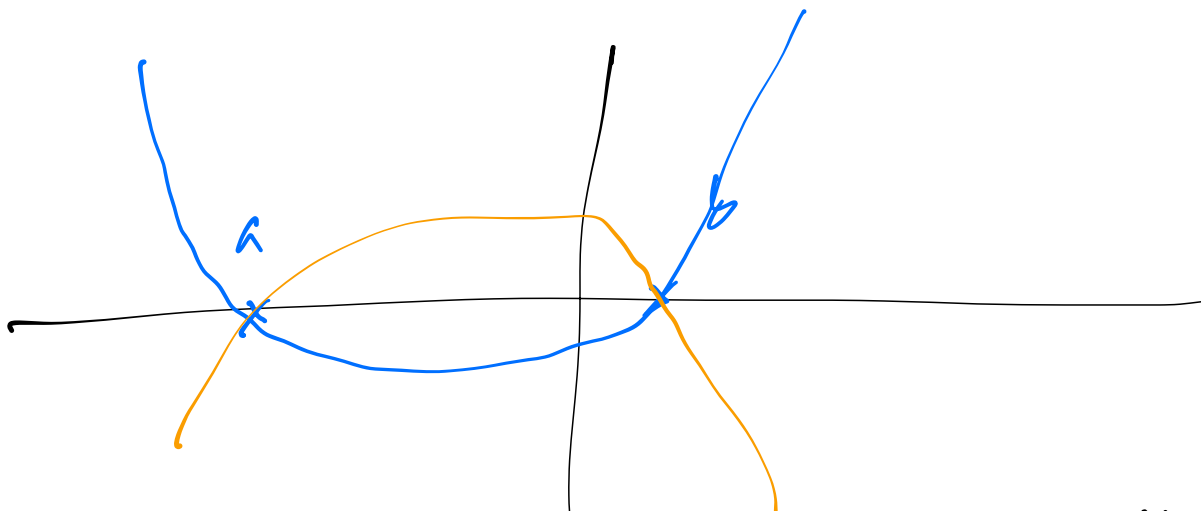
$$f(t) = \|x+yt\|^2 = \langle x+yt, x+yt \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$$

polynôme de degré 2 en t
si $\|y\| \neq 0$ ($y \neq 0$)

on approx
vrai

f est toujours positif ou nul
 donc f n'a pas de racine (dans $\mathbb{R}$)
 ou alors une racine double



donc $\text{disc}(f) \leq 0$. On calcule $\text{disc}(f)$
 et on a le résultat.