

Théorème de Cayley

Soit G d'ordre n . On numérote les éléments de G : $g_1, g_2, \dots, g_n$.

On considère l'application $G \xrightarrow{\pi} S_n$
 $x \mapsto \pi_x$
définie par : $x \in G$ et $i \in \{1, \dots, n\}$,

on calcule $xg_i = g_j$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$

et on pose $\pi_x(i) = j$ π_x est une permutation

$$\begin{aligned} \sum: \pi_x(i) = \pi_x(i') &\Leftrightarrow xg_i = xg_{i'} \\ &\Leftrightarrow g_i = g_{i'} \Leftrightarrow i = i' \end{aligned}$$

donc π_x est injectif donc bijectif donc
c'est une permutation

On montre que c'est un morphisme de groupes

$$x, y \in G: \pi_{xy} = \pi_x \pi_y$$

et $\chi \mapsto \pi_\chi$ est injective :

$$\pi_\chi = \text{id} \Leftrightarrow \forall i, \pi_\chi(i) = i$$

$$\Leftrightarrow \forall i, \underline{\chi g_i = g_i} \Leftrightarrow \underline{\chi = e}$$

(les permutations obtenus n'ont pas de point fixe)

$$\text{On a } G \simeq \text{Im}(\pi) \subseteq S_n$$