

Fonction  $\varphi$  d'Euler :

$$\varphi(n) = \# \{ m \text{ avec } 0 \leq m < n \text{ et } (m, n) = 1 \}$$

$n \geq 1$

$$\bullet \varphi(p^e) = p^{e-1}(p-1) \quad p \text{ premier}, e \geq 1$$

$$(\varphi(p) = p-1)$$

$$\bullet \text{ Si } (n, m) = 1 \text{ alors } \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$\varphi(60) = 60 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{array}{l} 2, 3, 5 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} 60 \\ 12 \end{array} \right. \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16$$

$G$  groupe cyclique d'ordre  $n$

$$\bullet \text{ Soit } d \geq 1. \text{ On note } N_d = \text{card} \{ g \in G \text{ d'ordre } d \}$$

Calculons  $N_d$  :

$$\textcircled{1} \text{ Si } d + n \text{ alors } N_d = 0 \text{ car par le th.}$$

de Lagrange, l'ordre de tout élément de  $G$  divise  $n$ .

② Si  $d|n$ , disons  $n = de$  avec  $e \in \mathbb{N}$   
l'ordre de  $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est

$\frac{n}{(m, n)}$  par la prop. du cours) donc  $\bar{m}$  est

d'ordre  $d$  si  $(m, n) = e \Rightarrow e|m$

On doit compter les  $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

tels que  $(m, n) = e$ . Il suffit de

considérer les  $m$  de la forme  $m = ke$

et alors

$$(ke, de) = e(k, d)$$

$$\text{d'où } (ke, n) = e \Leftrightarrow (k, d) = 1$$

De plus  $0 \leq m < n$  d'où  $0 \leq ke < n$

$$\text{d'où } 0 \leq k < n/e = d$$

Donc les éléments d'ordre  $d$  sont les

$$ke \text{ avec } 0 \leq k < d \text{ et } (k, d) = 1$$

$$\text{nombre} = \varphi(d)$$

$$\text{d'où } N_d = \varphi(d).$$

$$2. \text{ Montrer } \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \varphi(d) = n$$

$$\begin{aligned} |G| &= \# \bigcup_{d \geq 1} \{g \in G \text{ d'ordre } d\} = \# \bigcup_{d|n} \{g \in G \text{ d'ordre } d\} \\ &= \sum_{d|n} N_d \end{aligned}$$

Th: Soit  $p$  premier. Alors le groupe

multiplicity  $(2/p2)^*$  or cycle.