

Soient $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$ et $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$

Montrer $H \times K \cong G$

• Montrer $\forall h \in H, \forall k \in K, \underbrace{hk = kh}$

Soient $h \in H$ et $k \in K$, on considère

$$\underbrace{h k h^{-1} k^{-1}} = [h, k] \text{ commutateur de } h \text{ et } k$$

Groupe dérivée $G' = [G, G] = \langle [g, g'], g, g' \in G \rangle$

et abs $\underline{Th}$: $G' \triangleleft G$ et

G/G' est abélien et même, si $H \triangleleft G$
tel que G/H est abélien, abs $G' \subseteq H$

$$\underbrace{h k h^{-1} k^{-1}} \in K \text{ et}$$

$\in K$ car $K \triangleleft G$

$$\underbrace{h k h^{-1} k^{-1}} \in H$$

$\in H$ car $H \triangleleft G$

$$\text{d'où } hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$$

$$\text{d'où } hkh^{-1}k^{-1} = e \Leftrightarrow hk = kh$$

On considère $f: H \times K \rightarrow G$
 $(h, k) \mapsto hk$

Montrons que c'est un isomorphisme:

• morphisme: diff. de $H \times K$

$$\begin{aligned} f((h, k)(h', k')) &= f((hh', kk')) = hh'kk' \\ &= hk h'k' \text{ par le point précédent} \\ &= f((h, k)) \cdot f((h', k')) \end{aligned}$$

• injectif: Soit $(h, k) \in \ker f$

$$\text{alors } hk = e \text{ d'où } h = k^{-1} \in K \text{ d'où}$$

$$h \in H \cap K = \{e\} \text{ d'où } h = e \text{ et } k = e$$

$$\text{d'où } \ker f = \{(e, e)\}$$

• surjectif: par hypothèse puisque $HK = G$

$$\text{don't see } H \times K \cong G$$