

Sous-groupes caractéristiques

G groupe, H sous-groupe de G est dit caractéristique si $\forall f \in \text{Aut}(G)$, $f(H) \subseteq H$

On note $H \trianglelefteq G$. On montre

- $H \trianglelefteq G$ ssi $\forall f \in \text{Aut}(G)$, $\underline{f(H) = H}$
 $\Downarrow$ déf

$$\forall f \in \text{Aut}(G), \underline{f(H) \subseteq H}$$

Donc on a directement $\boxed{\Leftarrow}$

Pour montrer $\boxed{\Rightarrow}$, soit $f \in \text{Aut}(G)$, on a

$$f(H) \subseteq H. \text{ Il reste à montrer } H \subseteq f(H)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(H) \subseteq H \quad (f^{-1}(f(H)) = H \text{ car } f \text{ bij.})$$

or comme $\underline{f^{-1} \in \text{Aut}(G)}$, ceci est vérifié

1. Soit $H \trianglelefteq G$. Montrer $H \triangleleft G$

c'est-à-dire $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$.

Soit $g \in G$, on pose $\tau_g: G \rightarrow G$
 $x \mapsto gxg^{-1}$

c'est la conjugaison par g .

Th: τ_g est un automorphisme

On appelle τ_g un automorphisme
intérieur

$$\tau_g(xy)$$

$$gxyg^{-1}$$

$$gxg^{-1}gyg^{-1} = \tau_g(x)\tau_g(y)$$

Donc $\tau_g(H) \subseteq H$ puisque $H \subseteq G$

d'où $gHg^{-1} \subseteq H \forall g \in G$ donc $H \trianglelefteq G$

2. Supposons $\underline{H \subseteq K \subseteq G}$, montrer que $H \subseteq G$

On a $\forall f \in \text{Aut } G, f(K) \subseteq K \quad (K \subseteq G)$

$\forall \phi \in \text{Aut } K, \phi(H) \subseteq H \quad (H \subseteq K)$

Soit $f \in \text{Aut } G$, on considère $f|_K: K \rightarrow K$
($f(K) \subseteq K$)

c'est morphisme, bijectif : - injectif : clair

- Injectif : on a $f^{-1}(K) \subseteq K$ car $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$

d'où $K \subseteq f(K)$ donc ϕ surjectif

On a $\phi = f|_K \in \text{Aut}(K)$ or donc $\phi(H) \subseteq H$

mm) $\phi(H) = f(H)$ donc $f(H) \subseteq H$ or $H \subseteq G$.

$\uparrow$
 $f|_K$ or $H \subseteq K$

3. Supposons $H \subseteq K \trianglelefteq G$. Montrer $H \trianglelefteq G$

$K \trianglelefteq G$: $\forall f \in \text{Int}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \text{auto. int\'erieurs de } G$
 $= \{ f_x \text{ avec } x \in G \},$

$$f(K) \subseteq K$$

$H \subseteq K$: $\forall \phi \in \text{Aut}(K), \phi(H) \subseteq H$

Soit $f \in \underline{\text{Int}}(G)$, on pose $\phi = f|_K \in \underline{\text{Aut}}(K)$

En raisonnant comme ci-dessus, On a

donc $\phi(H) \subseteq H$ or $\phi(H) = f(H)$

d'où $H \trianglelefteq G$.

4. A faire

5. $\Phi: G \rightarrow \text{Int}(G)$ $\leftarrow$ sous groupe de $\text{Aut}(G)$

$$x \mapsto \bar{\iota}_x \text{ avec } \bar{\iota}_x(g) = xgx^{-1}$$

Alors Φ est morphisme :

$$\text{Soient } x, y \in G, \text{ on a } \Phi(xy) = \bar{\iota}_{xy}$$

$$\text{or } \bar{\iota}_{xy}(g) = xyg(xy)^{-1} = x(ygy^{-1})x^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Phi(xy)(g) &= x \bar{\iota}_y(g) x^{-1} = \bar{\iota}_x(\bar{\iota}_y(g)) \\ &= \bar{\iota}_x \circ \bar{\iota}_y(g) = \bar{\iota}_x \bar{\iota}_y(g) \\ &= \Phi(x) \Phi(y)g \end{aligned}$$

$$\text{donc } \Phi(xy) = \Phi(x) \Phi(y)$$

$$\text{On a } \text{Im } \Phi = \text{Int}(G)$$

$$\text{or } x \in \text{Ker } \Phi \Leftrightarrow \bar{\iota}_x = \text{id}_G \Leftrightarrow \forall g \in G \bar{\iota}_x(g) = g$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in G, xgx^{-1} = g \Leftrightarrow \forall g \in G, xg = gx$$

$(\Rightarrow) x \in Z(G)$ centre de G

D'après le 1^{er} isomorphisme: $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$.