

Réduction de Gauss

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2$$

$$\begin{aligned} & \bullet x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 \\ &= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3 - x_4) \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 \\ &\quad - (-x_2 + 2x_3 - x_4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2xa &= (x+a)^2 - a^2 \end{aligned}$$

d'où $q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 3x_4^2$

$$4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4 = 4(x_2^2 - x_2x_3 + 3x_2x_4)$$

$$= 4 \left[x_2^2 + 2x_2 \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right) \right]$$

$$= 4 \left[\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right)^2 \right]$$

... $q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4 \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right)^2 + 2x_3x_4$

$$ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2]$$

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4 \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \right)^2 \\ + \frac{1}{2} (x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{2} (x_3 - x_4)^2$$